А. Д. ПОЛЯНИН, А. В. МАНЖИРОВ

СПРАВОЧНИК
ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

МОСКВА
«ФАКТОРИАЛ»
1998

ББК 517.2
П-54
УДК 517.9

П-54 П о л я н и н А. Д., М а н ж и р о в А. В. **Справочник по интегральным уравнениям:** Точные решения. — М.: «Факториал», 1998. — 432 с. — ISBN 5-88688-024-0.

Справочник содержит более 2100 интегральных уравнений с решениями. Особое внимание уделено уравнениям общего вида, которые зависят от произвольных функций или содержат много свободных параметров. Приведено много новых точных решений линейных и нелинейных уравнений. В целом в справочнике описано на порядок больше конкретных интегральных уравнений, чем в существующих книгах других авторов.

Рассмотрен ряд интегральных уравнений, которые встречаются в различных областях механики и теоретической физики (теории упругости, теории пластичности, теории массо- и теплопереноса, аэро- и гидродинамике, теории колебаний, электродинамике и др.).

Справочник предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в различных областях математики, механики, физики, химии и биологии.

Библиогр. 61 назв.

ISBN 5-88688-024-0

Оглавление

Предисловие

Интегральные уравнения встречаются в различных областях науки и многочисленных приложениях (в теории упругости, теории пластичности, теории массо- и теплопереноса, теории колебаний, аэро- и гидродинамике, теории фильтрации, электростатике, электродинамике, биомеханике, теории игр, теории управления, теории массового обслуживания, электротехнике, экономике, медицине и др.).

Точные решения интегральных уравнений играют большую роль для формирования правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Различные уравнения физики, химии и биологии часто содержат функции или параметры, которые находятся экспериментально и, следовательно, не строго фиксированы. Поэтому целесообразно выбирать структуру этих функций таким образом, чтобы уравнение было удобно анализировать и решать. В качестве одного из возможных критериев выбора можно принять требование, чтобы модельное интегральное уравнение допускало решение в замкнутом виде. Важно отметить, что точные решения можно использовать для проверки корректности и оценки погрешности различных численных, асимптотических и приближенных методов.

Данная книга содержит более 2100 интегральных уравнений с решениями и представляет собой первую часть справочников авторов, опубликованных недавно на английском и немецком языках. Приведено много новых точных решений линейных и нелинейных уравнений. Особое внимание уделено уравнениям общего вида, которые зависят от произвольных функций. Остальные уравнения содержат один или несколько свободных параметров (фактически в книге рассматриваются сразу семейства интегральных уравнений), значения которых можно произвольно фиксировать по усмотрению читателя. В целом в справочнике описано на порядок больше конкретных интегральных уравнений, чем в существующих книгах других авторов.

После основного материала идет приложение, в котором приведены некоторые функциональные уравнения и их решения.

Книга разбита на главы, состоящие из разделов, которые содержат подразделы. Внутри разделов используется независимая сквозная нумерация уравнений. Расположение уравнений во всех разделах книги отвечает принципу «от простого к сложному». Это существенным образом облегчает работу с материалом. Достаточно подробное оглавление поможет читателю находить искомые уравнения. При ссылках запись вида 2.3.15 означает уравнение 15 из раздела 2.3.

Отметим, что некоторые классы интегральных уравнений сводились к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для решения последних использовались материалы справочников Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995, 1997); ссылки на эти книги часто опускаются. В справочниках Г. Бейтмена, А. Эрдейи (1973, 1974) и М. Абрамовица, И. Стиган (1979) можно найти подробное описание специальных функций, которые встречаются в тексте.

Авторы благодарны А. И. Журову и О. А. Васильевой за полезные замечания по рукописи книги.

Авторы надеются, что справочник окажется полезным для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в различных областях математики, механики, физики, химии, биологии, экономике и инженерных науках.

А. Д. Полянин
А. В. Манжиров

Основные обозначения

1. В книге при записи исходных интегральных уравнений независимая переменная обозначается через x, переменная интегрирования — через t, а неизвестная функция — через $y = y(x)$.

2. Обозначения для обыкновенных производных функции $f = f(x)$:

$$f'_x \equiv \frac{df}{dx},\;\; f''_{xx} \equiv \frac{d^2 f}{dx^2},\;\; f'''_{xxx} \equiv \frac{d^3 f}{dx^3},\;\; f''''_{xxxx} \equiv \frac{d^4 f}{dx^4},\;\; \text{а далее}\;\; f^{(n)}_x \equiv \frac{d^n f}{dx^n}\;\; \text{при}\;\; n \geqslant 4.$$

Аналогичные обозначения используются также для частных производных функций двух переменных, например, $K'_x(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial x} K(x,t)$.

3. В ряде случаев используется операторное обозначение $\left(f \dfrac{d}{dx}\right)^n g$, которое действует следующим образом:

$$\left(f(x)\frac{d}{dx}\right)^n g(x) = f(x)\frac{d}{dx}\left[\left(f(x)\frac{d}{dx}\right)^{n-1} g(x)\right].$$

4. В начале каждой главы написано, что $f = f(x)$, $g = g(x)$, $\dots$ — произвольные функции, A, B, $\dots$ — произвольные параметры. Это означает следующее (в тексте нижесказанное специально не оговаривается):

(а) $f = f(x)$, $g = g(x)$, $\dots$ — произвольные действительные непрерывные функции действительного аргумента;

(б) если решение содержит производные этих функций, то функции предполагаются дифференцируемыми (достаточное число раз);

(в) если уравнение или решение содержит интегралы с этими (в комбинации с другими) функциями, то интегралы предполагаются существующими (сходящимися);

(г) свободные параметры A, B, $\dots$ могут принимать любые действительные значения, при которых рассматриваемое уравнение и его решение имеет смысл (например, если решение содержит комбинацию $\frac{A}{1-A}$, то предполагается, что $A \neq 1$).

5. Используются следующие обозначения специальных функций:

$\operatorname{erf} x = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x \exp\left(-\xi^2\right) d\xi$ — интеграл вероятностей $(\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x)$,

$I_\nu(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$ — модифицированная функция Бесселя 1-го рода,

$J_\nu(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$ — функция Бесселя 1-го рода,

$K_\nu(x) = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\pi\nu)}$ — модифицированная функция Бесселя 2-го рода,

$Y_\nu(x) = \dfrac{J_\nu(x)\cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}$ — функция Бесселя 2-го рода,

$\gamma(\alpha, x) = \displaystyle\int_0^x e^{-\xi}\xi^{\alpha-1}\,d\xi$ — неполная гамма-функция,

$\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{\alpha-1}\,d\xi$ — гамма-функция,

$\Phi(\alpha, \beta; x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)} \frac{x^n}{n!}$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Некоторые определения

1. Линейные интегральные уравнения. *Линейное интегральное уравнение с переменным пределом интегрирования* имеет вид

$$\beta y(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)\,dt = f(x), \tag{1}$$

где $y(x)$ — неизвестная функция, $K(x,t)$ — ядро интегрального уравнения, $f(x)$ — некоторая известная функция, которая называется свободным членом или правой частью интегрального уравнения.

Линейное интегральное уравнение с постоянными пределами интегрирования имеет вид

$$\beta y(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = f(x). \tag{2}$$

При $\beta = 0$ уравнения (1) и (2) называются *линейными интегральными уравнениями первого рода*, а при $\beta \neq 0$ — *линейными интегральными уравнениями второго рода**.

Решением интегрального уравнения называется функция $y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

При $f(x) \equiv 0$ линейные уравнения называются однородными, в противном случае — неоднородными. Любое линейное однородное интегральное уравнение имеет тривиальное решение $y \equiv 0$.

Ядро интегрального уравнения $K(x,t)$ называется:
— вырожденным, если оно имеет вид $K(x,t) = g_1(x)h_1(t) + \cdots + g_n(x)h_n(t)$;
— разностным, если оно зависит от разности аргументов: $K(x,t) = K(x-t)$;
— симметричным, если оно удовлетворяет условию $K(x,t) = K(t,x)$.

Интегральными уравнениями Вольтерра первого или второго рода называются уравнения вида (1), на правые части и ядра которых наложены специальные условия. Обычно считают, что функция $f(x)$ непрерывна, либо квадратично интегрируема на $[a,b]$ ($a \leqslant x \leqslant b$), а ядро $K(x,t)$ непрерывно, либо квадратично интегрируемо в области $S = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$ ($K(x,t) \equiv 0$ при $t > x$). Уравнения вида (2) при тех же ограничениях на правые части и ядра (условие равенства нулю ядра при $t > x$ не выставляется) называются *уравнениями Фредгольма* первого или второго рода.

Для уравнений (1) и (2) рассматривают также классы ядер, имеющих интегрируемую особенность при $x = t$. Уравнения (1) называют в этом случае *уравнениями Вольтерра со слабой особенностью*, а (2) — уравнениями со слабой особенностью или часто *фредгольмовыми уравнениями*.

Уравнения вида (2) с разностными ядрами, интегрирование в которых производится по всей действительной оси или по полуоси, называются *уравнениями типа свертки*. Уравнения типа свертки (2), для которых $a = 0$ и $b = \infty$, называются *уравнениями Винера — Хопфа* первого или второго рода.

Если в интегральных уравнениях вида (2) интеграл существует только в смысле главного значения по Коши, то такие уравнения называются *сингулярными интегральными уравнениями*.

---

* В соответствующие разделы книги, посвященные уравнениям с переменным и постоянными пределами интегрирования, иногда будут включаться также уравнения более общего вида, которые вместо $y(t)$ в подынтегральном выражении содержат неизвестную функцию сложного аргумента $y(z)$, где $z = z(x,t)$.

Об указанных и других классах линейных интегральных уравнений, а также методах их решения можно прочитать в книгах, приведенных в конце этого раздела (см. также общий список литературы).

2. Нелинейные интегральные уравнения. *Нелинейное интегральное уравнение с переменным пределом интегрирования* часто записывают в следующей достаточно общей форме:

$$\beta y(x) + \int_a^x K\bigl(x, t, y(t)\bigr)\, dt = f(x), \tag{3}$$

где $y(x)$ — неизвестная функция, $K\bigl(x, t, y(t)\bigr)$ — ядро нелинейного интегрального уравнения, $f(x)$ — некоторая известная функция, которая называется свободным членом или правой частью интегрального уравнения.

Нелинейное интегральное уравнение с постоянными пределами интегрирования часто записывают в следующей достаточно общей форме:

$$\beta y(x) + \int_a^b K\bigl(x, t, y(t)\bigr)\, dt = f(x), \tag{4}$$

При $\beta = 0$ уравнения (3) и (4) называются *нелинейными интегральными уравнениями первого рода*, а при $\beta \neq 0$ — *нелинейными интегральными уравнениями второго рода.*

Уравнения вида (3) и (4) не охватывают все возможные формы нелинейных интегральных уравнений, однако включают часто встречающиеся и более всего изученные.

Уравнения вида (3) называются *интегральными уравнениями Вольтерра в форме Урысона* первого или второго рода. Если ядро может быть представлено в виде произведения

$$K\bigl(x, t, y(t)\bigr) = Q(x, t)\Phi\bigl(t, y(t)\bigr), \tag{5}$$

то уравнения (3) называются *интегральными уравнениями Вольтерра в форме Гаммерштейна* первого или второго рода.

Уравнения вида (4) называются *интегральными уравнениями Урысона* первого или второго рода. Если в уравнении (4) ядро $K\bigl(x, t, y(t)\bigr)$ имеет вид (5), то получаем *интегральные уравнения Гаммерштейна* первого или второго рода.

Об указанных и других классах нелинейных интегральных уравнений, а также методах их решения можно прочитать в книгах, приведенных ниже (см. также общий список литературы).

⦿ *Литература*: Г. Виарда (1933), Э. Гурса (1934), Г. М. Мюнтц (1934), И. И. Привалов (1935), И. Г. Петровский (1951), У. В. Ловитт (1957), С. Г. Михлин (1959), Ф. Трикоми (1960), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), Н. И. Мусхелишвили (1968), Л. Я. Цлаф (1970), В. И. Смирнов (1974), А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин (1976), Л. В. Канторович, Г. П. Акилов (1977), Ф. Д. Гахов (1977), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978), В. Вольтерра (1982), A. J. Jerry (1985), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986), С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987), И. К. Лифанов (1995), A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998).

1. Линейные уравнения первого рода с переменным пределом интегрирования

► ***Обозначения:*** $f = f(x)$, $g = g(x)$, $h = h(x)$, $K = K(x)$, $M = M(x)$ *— произвольные функции (вместо* x *у функций может быть сложный аргумент, зависящий от двух переменных* x *и* t*);* A, B, C, D, E, a, b, c, α, β, γ, λ, μ *— свободные параметры;* m, n *— целые неотрицательные числа.*

► **Предварительные замечания.** Для уравнений вида

$$\int_a^x K(x,t)y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

где функции $K(x,t)$ и $f(x)$ непрерывны, предполагается, что правая часть $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям.

1°. Если $K(a,a) \neq 0$, то $f(a) = 0$ (например, правые части уравнений 1.1.1 и 1.2.1 должны удовлетворять этому условию).

2°. Если $K(a,a) = K'_x(a,a) = \cdots = K^{(n-1)}_x(a,a) = 0$, $\ 0 < \bigl|K^{(n)}_x(a,a)\bigr| < \infty$, то для правой части имеем

$$f(a) = f'_x(a) = \cdots = f^{(n)}_x(a) = 0.$$

Например, при $n = 1$ эти ограничения накладываются на правую часть уравнения 1.1.2.

3°. Если $K(a,a) = K'_x(a,a) = \cdots = K^{(n-1)}_x(a,a) = 0$, $\ K^{(n)}_x(a,a) = \infty$, то условия на правую часть принимают вид

$$f(a) = f'_x(a) = \cdots = f^{(n-1)}_x(a) = 0.$$

Например, при $n = 1$ им должна удовлетворять правая часть уравнения 1.1.30.

В случае когда $K(x,t)$ имеет интегрируемую степенную или логарифмическую особенность при $x = t$, а $f(x)$ непрерывна, дополнительные условия на правые части интегральных уравнений не накладываются (например, см. уравнение Абеля 1.1.36).

В главе 1 условия типа 1°–3° как правило не приводятся.

1.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции

1.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t

1. $\displaystyle\int_a^x y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $y(x) = f'_x(x)$.

2. $\displaystyle\int_a^x (x-t)y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $y(x) = f''_{xx}(x)$.

3. $\displaystyle\int_a^x (Ax+Bt+C)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.5 при $g(x)=x$.

1°. Решение при $B\neq -A$:

$$y(x)=\frac{d}{dx}\left\{\bigl[(A+B)x+C\bigr]^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x \bigl[(A+B)t+C\bigr]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

2°. Решение при $B=-A$:

$$y(x)=\frac{1}{C}\frac{d}{dx}\left[\exp\Bigl(-\frac{A}{C}x\Bigr)\int_a^x \exp\Bigl(\frac{A}{C}t\Bigr) f'_t(t)\,dt\right].$$

1.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t

4. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^2 y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a)=f'_x(a)=f''_{xx}(a)=0.$

Решение: $y(x)=\frac{1}{2}f'''_{xxx}(x)$.

5. $\displaystyle\int_a^x (x^2-t^2) y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a)=f'_x(a)=0.$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x)=x^2$.

Решение: $y(x)=\dfrac{1}{2x^2}\bigl[xf''_{xx}(x)-f'_x(x)\bigr]$.

6. $\displaystyle\int_a^x \bigl(Ax^2+Bt^2\bigr) y(t)\,dt = f(x).$

При $B=-A$ см. уравнение 1.1.5. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x)=x^2$.

Решение: $y(x)=\dfrac{1}{A+B}\dfrac{d}{dx}\left[x^{-\frac{2A}{A+B}}\displaystyle\int_a^x t^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right]$.

7. $\displaystyle\int_a^x \bigl(Ax^2+Bt^2+C\bigr) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.5 при $g(x)=x^2$.
Решение:

$$y(x)=\operatorname{sign}\varphi(x)\,\frac{d}{dx}\left\{|\varphi(x)|^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x |\varphi(t)|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\},$$

где $\varphi(x)=(A+B)x^2+C$.

8. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ax^2+(B-A)xt-Bt^2\bigr] y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a)=f'_x(a)=0.$

Дифференцируя по x, получим уравнение вида 1.1.3:

$$\int_a^x [2Ax+(B-A)t]y(t)\,dt = f'_x(x).$$

Решение:

$$y(x)=\frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{2A}{A+B}}\int_a^x t^{\frac{A-B}{A+B}} f''_{tt}(t)\,dt\right].$$

9. $\displaystyle\int_a^x \big(Ax^2 + Bt^2 + Cx + Dt + E\big) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^2 + Cx$, $h(t) = Bt^2 + Dt + E$.

10. $\displaystyle\int_a^x \big(Axt + Bt^2 + Cx + Dt + E\big) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = x$, $h_1(t) = At + C$, $g_2(x) = 1$, $h_2(t) = Bt^2 + Dt + E$.

11. $\displaystyle\int_a^x \big(Ax^2 + Bxt + Cx + Dt + E\big) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Bx + D$, $h_1(t) = t$, $g_2(x) = Ax^2 + Cx + E$, $h_2(t) = 1$.

1.1-3. Ядра уравнений в виде кубических полиномов по аргументам x, t

12. $\displaystyle\int_a^x (x - t)^3 y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0.$

Решение: $y(x) = \frac{1}{6} f''''_{xxxx}(x)$.

13. $\displaystyle\int_a^x (x^3 - t^3) y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = x^3$.

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{3x^3}\big[x f'''_{xxx}(x) - 2 f'_x(x)\big]$.

14. $\displaystyle\int_a^x \big(Ax^3 + Bt^3\big) y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.1.13. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = x^3$.

Решение при $0 \leqslant a \leqslant x$: $\quad y(x) = \dfrac{1}{A + B}\dfrac{d}{dx}\left[x^{-\frac{3A}{A+B}} \displaystyle\int_a^x t^{-\frac{3B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right]$.

15. $\displaystyle\int_a^x \big(Ax^3 + Bt^3 + C\big) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.5 при $g(x) = x^3$.

16. $\displaystyle\int_a^x (x^2 t - x t^2) y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Частный случай уравнения 1.9.11 при $g(x) = x^2$, $h(x) = x$.

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{d^2}{dx^2}\left[\dfrac{1}{x} f(x)\right]$.

17. $\displaystyle\int_a^x (Ax^2 t + Bxt^2) y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.1.16. Частный случай уравнения 1.9.12 при $g(x) = x^2$, $h(x) = x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{(A + B)x}\frac{d}{dx}\left\{x^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x t^{-\frac{B}{A+B}} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{t} f(t)\right] dt\right\}.$$

18. $\displaystyle\int_a^x (Ax^3 + Bxt^2)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^3$, $h_1(t) = 1$, $g_2(x) = Bx$, $h_2(t) = t^2$.

19. $\displaystyle\int_a^x (Ax^3 + Bx^2 t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^3$, $h_1(t) = 1$, $g_2(x) = Bx^2$, $h_2(t) = t$.

20. $\displaystyle\int_a^x (Ax^2 t + Bt^3)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^2$, $h_1(t) = t$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = t^3$.

21. $\displaystyle\int_a^x (Axt^2 + Bt^3)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax$, $h_1(t) = t^2$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = t^3$.

22. $\displaystyle\int_a^x \bigl(A_3x^3 + B_3t^3 + A_2x^2 + B_2t^2 + A_1x + B_1t + C\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + C$, $h(t) = B_3t^3 + B_2t^2 + B_1t$.

1.1-4. Ядра уравнений в виде полиномов более высокой степени

23. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^n y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \dots$

Считается, что правая часть уравнения Вольтерра удовлетворяет условиям $f(a) = f'_x(a) = \dots = f^{(n)}_x(a) = 0$.

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{n!} f^{(n+1)}_x(x).$

В частном случае при $f(x) = Ax^m$, где m — натуральное число, $m > n$, решение имеет вид

$$y(x) = \frac{Am!}{n!\,(m-n-1)!}x^{m-n-1}.$$

24. $\displaystyle\int_a^x (x^n - t^n)y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{n}\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f'_x(x)}{x^{n-1}}\right].$

25. $\displaystyle\int_a^x \bigl(t^n x^{n+1} - x^n t^{n+1}\bigr)y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 2, 3, \dots$

Частный случай уравнения 1.9.11 при $g(x) = x^{n+1}$, $h(x) = x^n$.

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{x^n}\dfrac{d^2}{dx^2}\left[\dfrac{f(x)}{x^n}\right].$

1.1-5. Ядра уравнений содержат рациональные функции

26. $\displaystyle \int_0^x \frac{y(t)\,dt}{x+t} = f(x).$

1°. Для полиномиальной правой части $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{B_n} x^n, \qquad B_n = (-1)^n \left[\ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right].$$

2°. Для правой части $f(x) = x^\lambda \sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n$, где λ — любое ($\lambda > -1$), решение имеет вид

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{B_n} x^n, \qquad B_n = \int_0^1 \frac{t^{\lambda+n}\,dt}{1+t}.$$

3°. Для правой части $f(x) = \ln x \left(\sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n\right)$ решение имеет вид

$$y(x) = \ln x \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{B_n} x^n + \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n I_n}{B_n^2} x^n,$$

$$B_n = (-1)^n \left[\ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right], \quad I_n = (-1)^n \left[\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}\right].$$

4°. Для правой части $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} A_n (\ln x)^n$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n Y_n(x),$$

где функции $Y_n = Y_n(x)$ определяются по формулам:

$$Y_n(x) = \left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\frac{x^\lambda}{I(\lambda)}\right]\right\}_{\lambda=0}, \qquad I(\lambda) = \int_0^1 \frac{z^\lambda\,dz}{1+z}.$$

5°. Для правой части $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} A_n \cos(\lambda_n \ln x) + \sum\limits_{n=1}^{N} B_n \sin(\lambda_n \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n \cos(\lambda_n \ln x) + \sum_{n=1}^{N} D_n \sin(\lambda_n \ln x),$$

где постоянные C_n и D_n определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для произвольной правой части $f(x)$ преобразование

$$x = \tfrac{1}{2} e^{2z}, \quad t = \tfrac{1}{2} e^{2\tau}, \quad y(t) = e^{-\tau} w(\tau), \quad f(x) = e^{-z} g(z)$$

приводит к интегральному уравнению с разностным ядром вида 1.9.26:

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{w(\tau)\,d\tau}{\operatorname{ch}(z-\tau)} = g(z).$$

27. $\displaystyle\int_0^x \frac{y(t)\,dt}{ax+bt} = f(x), \qquad a>0, \quad a+b>0.$

1°. Для полиномиальной правой части $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n$ решение имеет вид

$$y(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{A_n}{B_n}x^n, \qquad B_n=\int_0^1\frac{t^n\,dt}{a+bt}.$$

2°. Для правой части $f(x)=x^\lambda\sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n$, где λ — любое ($\lambda>-1$), решение имеет вид

$$y(x)=x^\lambda\sum_{n=0}^{N}\frac{A_n}{B_n}x^n, \qquad B_n=\int_0^1\frac{t^{\lambda+n}\,dt}{a+bt}.$$

3°. Для правой части $f(x)=\ln x\left(\sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n\right)$ решение имеет вид

$$y(x)=\ln x\sum_{n=0}^{N}\frac{A_n}{B_n}x^n-\sum_{n=0}^{N}\frac{A_nC_n}{B_n^2}x^n, \qquad B_n=\int_0^1\frac{t^n\,dt}{a+bt}, \quad C_n=\int_0^1\frac{t^n\ln t}{a+bt}\,dt.$$

4°. Для некоторых других частных видов правой части (см. пп. 4, 5 в уравнении 1.1.26) решение можно найти методом неопределенных коэффициентов.

28. $\displaystyle\int_0^x \frac{y(t)\,dt}{ax^2+bt^2} = f(x), \qquad a>0, \quad a+b>0.$

1°. Для полиномиальной правой части $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n$ решение имеет вид

$$y(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{A_n}{B_n}x^{n+1}, \qquad B_n=\int_0^1\frac{t^{n+1}\,dt}{a+bt^2}.$$

В частном случае при $a=b=1$ и $f(x)=Ax^2+Bx+C$ решение интегрального уравнения дается формулой

$$y(x)=\frac{2A}{1-\ln 2}x^3+\frac{4B}{4-\pi}x^2+\frac{2C}{\ln 2}x.$$

2°. Для правой части $f(x)=x^\lambda\sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n$, где λ — любое ($\lambda>-1$), решение имеет вид

$$y(x)=x^\lambda\sum_{n=0}^{N}\frac{A_n}{B_n}x^{n+1}, \qquad B_n=\int_0^1\frac{t^{\lambda+n+1}\,dt}{a+bt^2}.$$

3°. Для правой части $f(x)=\ln x\left(\sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n\right)$ решение имеет вид

$$y(x)=\ln x\sum_{n=0}^{N}\frac{A_n}{B_n}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{N}\frac{A_nC_n}{B_n^2}x^{n+1},$$
$$B_n=\int_0^1\frac{t^{n+1}\,dt}{a+bt^2}, \qquad C_n=\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln t}{a+bt^2}\,dt.$$

29. $\displaystyle\int_0^x \frac{y(t)\,dt}{ax^m + bt^m} = f(x), \qquad a > 0, \quad a + b > 0, \quad m = 1, 2, \ldots$

1°. Для полиномиальной правой части $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{B_n} x^{m+n-1}, \qquad B_n = \int_0^1 \frac{t^{m+n-1}\,dt}{a + bt^m}.$$

2°. Для правой части $f(x) = x^\lambda \sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n$, где λ — любое ($\lambda > -1$), решение имеет вид

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{B_n} x^{m+n-1}, \qquad B_n = \int_0^1 \frac{t^{\lambda+m+n-1}\,dt}{a + bt^m}.$$

3°. Для правой части $f(x) = \ln x \left(\sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n \right)$ решение имеет вид

$$y(x) = \ln x \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{B_n} x^{m+n-1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n C_n}{B_n^2} x^{m+n-1},$$

$$B_n = \int_0^1 \frac{t^{m+n-1}\,dt}{a + bt^m}, \quad C_n = \int_0^1 \frac{t^{m+n-1} \ln t}{a + bt^m}\,dt.$$

1.1-6. Ядра уравнений содержат квадратные корни

30. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{x - t}\, y(t)\,dt = f(x).$

Дифференцируя по x, приходим к уравнению Абеля 1.1.36:

$$\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{x - t}} = 2f'_x(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x - t}}.$$

31. $\displaystyle\int_a^x \big(\sqrt{x} - \sqrt{t}\big) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.1.44 при $\mu = \frac{1}{2}$.

Решение: $y(x) = 2\dfrac{d}{dx}\big[\sqrt{x}\, f'_x(x)\big]$.

32. $\displaystyle\int_a^x \big(A\sqrt{x} + B\sqrt{t}\big) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.1.45 при $\mu = \frac{1}{2}$.

33. $\displaystyle\int_a^x \big(1 + b\sqrt{x - t}\big) y(t)\,dt = f(x).$

Дифференцируя по x, приходим к уравнению Абеля второго рода 2.1.46:

$$y(x) + \frac{b}{2} \int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{x - t}} = f'_x(x).$$

34. $\displaystyle\int_a^x \bigl(t\sqrt{x} - x\sqrt{t}\,\bigr) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.11 при $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x$.

35. $\displaystyle\int_a^x \bigl(At\sqrt{x} + Bx\sqrt{t}\,\bigr) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.12 при $g(x) = \sqrt{x}$, $h(t) = t$.

36. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = f(x).$

Уравнение Абеля.
Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = \frac{f(a)}{\pi\sqrt{x-a}} + \frac{1}{\pi}\int_a^x \frac{f'_t(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}.$$

⦿ *Литература*: Э. Т. Уиттекер, Дж. Ватсон (1963, стр. 322).

37. $\displaystyle\int_a^x \left(b + \frac{1}{\sqrt{x-t}}\right) y(t)\,dt = f(x).$

Запишем это уравнение в виде

$$\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = f(x) - b\int_a^x y(t)\,dt.$$

Считая теперь правую часть этого выражения известной, решим его как уравнение Абеля 1.1.36. В результате после некоторых преобразований получим уравнение Абеля второго рода 2.1.46:

$$y(x) + \frac{b}{\pi}\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = F(x), \qquad \text{где} \quad F(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}.$$

38. $\displaystyle\int_a^x \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.1.44 при $\mu = -\frac{1}{2}$.

Решение: $y(x) = -2\bigl[x^{3/2} f'_x(x)\bigr]'_x, \qquad a > 0.$

39. $\displaystyle\int_a^x \left(\frac{A}{\sqrt{x}} + \frac{B}{\sqrt{t}}\right) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.1.45 при $\mu = -\frac{1}{2}$.

40. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = f(x).$

Решение: $\displaystyle y = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{tf(t)\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}}.$

⦿ *Литература*: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 32).

41. $\displaystyle\int_0^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{ax^2+bt^2}} = f(x), \qquad a>0, \quad a+b>0.$

1°. Для полиномиальной правой части $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n$ решение имеет вид

$$y(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{A_n}{B_n}x^n, \qquad B_n=\int_0^1\frac{t^n\,dt}{\sqrt{a+bt^2}}.$$

2°. Для правой части $f(x)=x^\lambda\sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n$, где λ — любое ($\lambda>-1$), решение имеет вид

$$y(x)=x^\lambda\sum_{n=0}^{N}\frac{A_n}{B_n}x^n, \qquad B_n=\int_0^1\frac{t^{\lambda+n}\,dt}{\sqrt{a+bt^2}}.$$

3°. Для правой части $f(x)=\ln x\left(\sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n\right)$ решение имеет вид

$$y(x)=\ln x\sum_{n=0}^{N}\frac{A_n}{B_n}x^n-\sum_{n=0}^{N}\frac{A_nC_n}{B_n^2}x^n, \quad B_n=\int_0^1\frac{t^n\,dt}{\sqrt{a+bt^2}}, \quad C_n=\int_0^1\frac{t^n\ln t}{\sqrt{a+bt^2}}\,dt.$$

4°. Для правой части $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{N} A_n(\ln x)^n$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{n=0}^{N}A_nY_n(x),$$

где функции $Y_n=Y_n(x)$ определяются по формулам:

$$Y_n(x)=\left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\frac{x^\lambda}{I(\lambda)}\right]\right\}_{\lambda=0}, \qquad I(\lambda)=\int_0^1\frac{z^\lambda\,dz}{\sqrt{a+bz^2}}.$$

5°. Для правой части $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{N} A_n\cos(\lambda_n\ln x)+\sum\limits_{n=1}^{N} B_n\sin(\lambda_n\ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{n=1}^{N}C_n\cos(\lambda_n\ln x)+\sum_{n=1}^{N}D_n\sin(\lambda_n\ln x),$$

где постоянные C_n и D_n определяются методом неопределенных коэффициентов.

1.1-7. Ядра уравнений содержат произвольные степени

42. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^\lambda y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a)=0, \quad 0<\lambda<1.$

Дифференцируя по x, приходим к обобщенному уравнению Абеля 1.1.46:

$$\int_a^x\frac{y(t)\,dt}{(x-t)^{1-\lambda}}=\frac{1}{\lambda}f'_x(x).$$

Решение:

$$y(x)=k\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\lambda}, \qquad k=\frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

⊙ *Литература*: Ф. Д. Гахов (1977, стр. 602).

43. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^\mu y(t)\,dt = f(x).$

При $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ см. уравнения 1.1.1, 1.1.2, 1.1.4, 1.1.12, 1.1.23. При $0<\mu<1$ см. уравнение 1.1.42.

Пусть $\mu = n-\lambda$, где $n = 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant \lambda < 1$ и $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f_x^{(n-1)}(a) = 0$. Дифференцируя обе части уравнения n раз, получим уравнение вида 1.1.46:

$$\int_a^x \frac{y(t)\,d\tau}{(x-t)^\lambda} = \frac{\Gamma(\mu-n+1)}{\Gamma(\mu+1)} f_x^{(n)}(x),$$

где $\Gamma(\mu)$ — гамма-функция.

В частном случае при $f(x) = Ax^\beta$, где $\beta \geqslant 0$, $\mu > -1$, $\mu-\beta \neq 0, 1, 2, \ldots$, решение имеет следующий вид: $y(x) = \dfrac{A\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\beta-\mu)} x^{\beta-\mu-1}$.

⦿ *Литература*: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 55).

44. $\displaystyle\int_a^x (x^\mu - t^\mu) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = x^\mu$.

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{\mu}\left[x^{1-\mu} f'_x(x)\right]'_x$.

45. $\displaystyle\int_a^x (Ax^\mu + Bt^\mu) y(t)\,dt = f(x).$

При $B=-A$ см. уравнение 1.1.44. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = x^\mu$.

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{A+B}\dfrac{d}{dx}\left[x^{-\frac{A\mu}{A+B}} \displaystyle\int_a^x t^{-\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right]$.

46. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{(x-t)^\lambda} = f(x), \qquad 0<\lambda<1.$

Обобщенное уравнение Абеля.

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\lambda}} = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\lambda}} + \int_a^x \frac{f'_t(t)\,dt}{(x-t)^{1-\lambda}}\right].$$

⦿ *Литература*: Э. Т. Уиттекер, Дж. Ватсон (1963, стр. 322).

47. $\displaystyle\int_a^x \left[b + \frac{1}{(x-t)^\lambda}\right] y(t)\,dt = f(x), \qquad 0<\lambda<1.$

Запишем это уравнение в виде

$$\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{(x-t)^\lambda} = f(x) - b\int_a^x y(t)\,dt.$$

Считая теперь правую часть этого выражения известной, решим его как обобщенное уравнение Абеля 1.1.46. В результате после некоторых преобразований получим уравнение Абеля второго рода 2.1.60:

$$y(x) + \frac{b\sin(\pi\lambda)}{\pi}\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{(x-t)^{1-\lambda}} = F(x), \quad F(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\lambda}}.$$

48. $\displaystyle\int_a^x \bigl(\sqrt{x}-\sqrt{t}\,\bigr)^\lambda y(t)\,dt = f(x), \qquad 0<\lambda<1.$

Решение:

$$y(x)=\frac{k}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}\right)^2\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{t}\,\bigl(\sqrt{x}-\sqrt{t}\,\bigr)^\lambda},\qquad k=\frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

49. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\bigl(\sqrt{x}-\sqrt{t}\,\bigr)^\lambda} = f(x), \qquad 0<\lambda<1.$

Решение:

$$y(x)=\frac{\sin(\pi\lambda)}{2\pi}\,\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{t}\,\bigl(\sqrt{x}-\sqrt{t}\,\bigr)^{1-\lambda}}.$$

50. $\displaystyle\int_a^x \bigl(Ax^\lambda + Bt^\mu\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x)=Ax^\lambda$, $h(t)=Bt^\mu$.

51. $\displaystyle\int_a^x \bigl[1+A(x^\lambda t^\mu - x^{\lambda+\mu})\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.13 при $g(x)=Ax^\mu$, $h(x)=x^\lambda$.
Решение:

$$y(x)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{x^\lambda}{\Phi(x)}\int_a^x \bigl[t^{-\lambda}f(t)\bigr]'_t\Phi(t)\,dt\right\},\qquad \Phi(x)=\exp\Bigl(-\frac{A\mu}{\mu+\lambda}x^{\mu+\lambda}\Bigr).$$

52. $\displaystyle\int_a^x \bigl(Ax^\beta t^\gamma + Bx^\delta t^\lambda\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=Ax^\beta$, $h_1(t)=t^\gamma$, $g_2(x)=Bx^\delta$, $h_2(t)=t^\lambda$.

53. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ax^\lambda(t^\mu - x^\mu)+Bx^\beta(t^\gamma - x^\gamma)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.45 при $g_1(x)=Ax^\lambda$, $h_1(x)=x^\mu$, $g_2(x)=Bx^\beta$, $h_2(x)=x^\gamma$.

54. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ax^\lambda t^\mu + Bx^{\lambda+\beta}t^{\mu-\beta} - (A+B)x^{\lambda+\gamma}t^{\mu-\gamma}\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.47 при $g(x)=x$.

55. $\displaystyle\int_a^x t^\sigma(x^\mu - t^\mu)^\lambda y(t)\,dt = f(x), \qquad \sigma>-1, \quad \mu>0, \quad \lambda>-1.$

Преобразование $\tau=t^\mu$, $z=x^\mu$, $w(\tau)=t^{\sigma-\mu+1}y(t)$ приводит к уравнению вида 1.1.42:

$$\int_A^z (z-\tau)^\lambda w(\tau)\,d\tau = F(z),$$

где $A=a^\mu$, $F(z)=\mu f(z^{1/\mu})$.
Решение при $-1<\lambda<0$:

$$y(x)=-\frac{\mu\sin(\pi\lambda)}{\pi x^\sigma}\,\frac{d}{dx}\left[\int_a^x t^{\mu-1}(x^\mu - t^\mu)^{-1-\lambda}f(t)\,dt\right].$$

56. $\displaystyle\int_0^x \frac{y(t)\,dt}{(x+t)^\mu} = f(x).$

Частный случай уравнения 1.1.57 при $\lambda=1$, $a=b=1$.

Преобразование

$$x=\tfrac{1}{2}e^{2z},\quad t=\tfrac{1}{2}e^{2\tau},\quad y(t)=e^{(\mu-2)\tau}w(\tau),\quad f(x)=e^{-\mu z}g(z)$$

приводит к уравнению с разностным ядром вида 1.9.26:

$$\int_{-\infty}^z \frac{w(\tau)\,d\tau}{\operatorname{ch}^\mu(z-\tau)} = g(z).$$

57. $\displaystyle\int_0^x \frac{y(t)\,dt}{(ax^\lambda+bt^\lambda)^\mu} = f(x), \qquad a>0,\quad a+b>0.$

1°. Замена $t=xz$ приводит к частному случаю уравнения 3.8.45:

$$\int_0^1 \frac{y(xz)\,dz}{(a+bz^\lambda)^\mu} = x^{\lambda\mu-1}f(x). \tag{1}$$

2°. Для полиномиальной правой части $f(x)=\sum\limits_{m=0}^{n} A_m x^m$ решение имеет вид

$$y(x)=x^{\lambda\mu-1}\sum_{m=0}^{n}\frac{A_m}{I_m}x^m,\qquad I_m=\int_0^1\frac{z^{m+\lambda\mu-1}\,dz}{(a+bz^\lambda)^\mu}.$$

Считается, что существуют интегралы I_m.

3°. Структуру решения для некоторых других правых частей интегрального уравнения можно получить исходя из (1) и результатов, приведенных для более общего уравнения 3.8.45 (см. также уравнения 3.8.26–3.8.32).

4°. При $a=b$ это уравнение, как и уравнение 1.1.56, можно свести к интегральному уравнению с разностным ядром вида 1.9.26.

58. $\displaystyle\int_a^x \frac{\bigl(\sqrt{x}+\sqrt{x-t}\bigr)^{2\lambda}+\bigl(\sqrt{x}-\sqrt{x-t}\bigr)^{2\lambda}}{2t^\lambda\sqrt{x-t}}\,y(t)\,dt = f(x).$

Это уравнение можно записать с помощью гипергеометрической функции Гаусса в виде

$$\int_a^x (x-t)^{\gamma-1}F\Bigl(\lambda,\,-\lambda,\,\gamma;\,1-\frac{x}{t}\Bigr)y(t)\,dt=f(x),\qquad \text{где}\quad \gamma=\tfrac{1}{2}.$$

Решение этого уравнения см. в 1.8.86.

1.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции

1.2-1. Ядра уравнений содержат экспоненциальные функции

1. $\displaystyle\int_a^x e^{\lambda(x-t)}y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $y(x)=f'_x(x)-\lambda f(x)$.

В частном случае $a=0$ при $f(x)=Ax$ решение дается формулой $y(x)=A(1-\lambda x)$.

2. $\displaystyle\int_a^x e^{\lambda x+\beta t}y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $y(x) = e^{-(\lambda+\beta)x}\big[f'_x(x) - \lambda f(x)\big]$.

В частном случае $a = 0$ при $f(x) = A\sin(\gamma x)$ решение дается формулой $y(x) = Ae^{-(\lambda+\beta)x}[\gamma\cos(\gamma x) - \lambda\sin(\gamma x)]$.

3. $\displaystyle\int_a^x \big[e^{\lambda(x-t)} - 1\big]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda}f''_{xx}(x) - f'_x(x)$.

4. $\displaystyle\int_a^x \big[e^{\lambda(x-t)} + b\big]y(t)\,dt = f(x).$

При $b = -1$ см. уравнение 1.2.3. Дифференцируя по x, приходим к уравнению вида 2.2.1:

$$y(x) + \frac{\lambda}{b+1}\int_a^x e^{\lambda(x-t)}y(t)\,dt = \frac{f'_x(x)}{b+1}.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{f'_x(x)}{b+1} - \frac{\lambda}{(b+1)^2}\int_a^x \exp\left[\frac{\lambda b}{b+1}(x-t)\right]f'_t(t)\,dt.$$

5. $\displaystyle\int_a^x \big(e^{\lambda x+\beta t} + b\big)y(t)\,dt = f(x).$

При $\beta = -\lambda$ см. уравнение 1.2.4. Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = e^{\lambda x}$, $h_1(t) = e^{\beta t}$, $g_2(x) = 1$, $h_2(t) = b$.

6. $\displaystyle\int_a^x \big(e^{\lambda x} - e^{\lambda t}\big)y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = e^{\lambda x}$.

Решение: $y(x) = e^{-\lambda x}\left[\dfrac{1}{\lambda}f''_{xx}(x) - f'_x(x)\right]$.

7. $\displaystyle\int_a^x \big(e^{\lambda x} - e^{\lambda t} + b\big)y(t)\,dt = f(x).$

При $b = 0$ см. уравнение 1.2.6. Частный случай уравнения 1.9.3 при $g(x) = e^{\lambda x}$. Решение:

$$y(x) = \frac{1}{b}f'_x(x) - \frac{\lambda}{b^2}e^{\lambda x}\int_a^x \exp\left(\frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda x}}{b}\right)f'_t(t)\,dt.$$

8. $\displaystyle\int_a^x \big(Ae^{\lambda x} + Be^{\lambda t}\big)y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.2.6. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = e^{\lambda x}$.

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{A+B}\dfrac{d}{dx}\left[\exp\Bigl(-\dfrac{A\lambda}{A+B}x\Bigr)\displaystyle\int_a^x \exp\Bigl(-\dfrac{B\lambda}{A+B}t\Bigr)f'_t(t)\,dt\right]$.

9. $\displaystyle\int_a^x \big(Ae^{\lambda x} + Be^{\lambda t} + C\big)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.5 при $g(x) = e^{\lambda x}$.

10. $\displaystyle\int_a^x \bigl(Ae^{\lambda x} + Be^{\mu t}\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

При $\lambda = \mu$ см. уравнение 1.2.8. Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ae^{\lambda x}$, $h(t) = Be^{\mu t}$.

11. $\displaystyle\int_a^x \bigl[e^{\lambda(x-t)} - e^{\mu(x-t)}\bigr]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda-\mu}\bigl[f''_{xx} - (\lambda+\mu)f'_x + \lambda\mu f\bigr], \qquad f = f(x).$$

12. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\lambda(x-t)} + Be^{\mu(x-t)}\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.2.11. Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\lambda x}$, $h_1(t) = e^{-\lambda t}$, $g_2(x) = Be^{\mu x}$, $h_2(t) = e^{-\mu t}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{e^{\lambda x}}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{e^{(\mu-\lambda)x}\Phi(x)\int_a^x \left[\frac{f(t)}{e^{\mu t}}\right]'_t \frac{dt}{\Phi(t)}\right\}, \qquad \Phi(x) = \exp\left[\frac{B(\lambda-\mu)}{A+B}x\right].$$

13. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\lambda(x-t)} + Be^{\mu(x-t)} + C\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.2.14 при $\beta = 0$.

14. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\lambda(x-t)} + Be^{\mu(x-t)} + Ce^{\beta(x-t)}\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Дифференцируя уравнение по x, имеем

$$(A+B+C)y(x) + \int_a^x \bigl[A\lambda e^{\lambda(x-t)} + B\mu e^{\mu(x-t)} + C\beta e^{\beta(x-t)}\bigr]y(t)\,dt = f'_x(x).$$

Исключая отсюда слагаемое с множителем $e^{\beta(x-t)}$ с помощью исходного уравнения, приходим к уравнению вида 2.2.10:

$$(A+B+C)y(x) + \int_a^x \bigl[A(\lambda-\beta)e^{\lambda(x-t)} + B(\mu-\beta)e^{\mu(x-t)}\bigr]y(t)\,dt = f'_x(x) - \beta f(x).$$

В частном случае $A+B+C=0$ это уравнение вида 1.2.12.

15. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\lambda(x-t)} + Be^{\mu(x-t)} + Ce^{\beta(x-t)} - A - B - C\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Здесь $f(a) = f'_x(a) = 0$. Дифференцируя по x, получим уравнение вида 1.2.14:

$$\int_a^x \bigl[A\lambda e^{\lambda(x-t)} + B\mu e^{\mu(x-t)} + C\beta e^{\beta(x-t)}\bigr]y(t)\,dt = f'_x(x).$$

16. $\displaystyle\int_a^x \bigl(e^{\lambda x+\mu t} - e^{\mu x+\lambda t}\bigr)y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Частный случай уравнения 1.9.11 при $g(x) = e^{\lambda x}$, $h(t) = e^{\mu t}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{f''_{xx} - (\lambda+\mu)f'_x(x) + \lambda\mu f(x)}{(\lambda-\mu)\exp[(\lambda+\mu)x]}.$$

17. $\displaystyle\int_a^x \bigl(Ae^{\lambda x+\mu t} + Be^{\mu x+\lambda t}\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.2.16. Частный случай уравнения 1.9.12 при $g(x) = e^{\lambda x}$, $h(t) = e^{\mu t}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{(A+B)e^{\mu x}}\frac{d}{dx}\left\{\Phi^A(x)\int_a^x \Phi^B(t)\frac{d}{dt}\left[\frac{f(t)}{e^{\mu t}}\right]dt\right\}, \quad \Phi(x) = \exp\left(\frac{\mu-\lambda}{A+B}x\right).$$

18. $\displaystyle\int_a^x \bigl(Ae^{\lambda x+\mu t} + Be^{\beta x+\gamma t}\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\lambda x}$, $h_1(t) = e^{\mu t}$, $g_2(x) = Be^{\beta x}$, $h_2(t) = e^{\gamma t}$.

19. $\displaystyle\int_a^x \bigl(Ae^{2\lambda x} + Be^{2\beta t} + Ce^{\lambda x} + De^{\beta t} + E\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ae^{2\lambda x} + Ce^{\lambda x}$, $h(t) = Be^{2\beta t} + De^{\beta t} + E$.

20. $\displaystyle\int_a^x \bigl(Ae^{\lambda x+\beta t} + Be^{2\beta t} + Ce^{\lambda x} + De^{\beta t} + E\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = e^{\lambda x}$, $h_1(t) = Ae^{\beta t} + C$, $g_2(x) = 1$, $h_2(t) = Be^{2\beta t} + De^{\beta t} + E$.

21. $\displaystyle\int_a^x \bigl(Ae^{2\lambda x} + Be^{\lambda x+\beta t} + Ce^{\lambda x} + De^{\beta t} + E\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Be^{\lambda x} + D$, $h_1(t) = e^{\beta t}$, $g_2(x) = Ae^{2\lambda x} + Ce^{\lambda x} + E$, $h_2(t) = 1$.

22. $\displaystyle\int_a^x \bigl[1 + Ae^{\lambda x}(e^{\mu t} - e^{\mu x})y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.13 при $g(x) = e^{\mu x}$, $h(x) = Ae^{\lambda x}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx}\left\{e^{\lambda x}\Phi(x)\int_a^x\left[\frac{f(t)}{e^{\lambda t}}\right]'_t\frac{dt}{\Phi(t)}\right\}, \qquad \Phi(x) = \exp\left[\frac{A\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)x}\right].$$

23. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\lambda x}(e^{\mu x} - e^{\mu t}) + Be^{\beta x}(e^{\gamma x} - e^{\gamma t})\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.45 при $g_1(x) = Ae^{\lambda x}$, $h_1(t) = -e^{\mu t}$, $g_2(x) = Be^{\beta x}$, $h_2(t) = -e^{\gamma t}$.

24. $\displaystyle\int_a^x \bigl\{A\exp(\lambda x + \mu t) + B\exp[(\lambda+\beta)x + (\mu-\beta)t] -$

$$- (A+B)\exp[(\lambda+\gamma)x + (\mu-\gamma)t]\bigr\}y(t)\,dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.47 при $g_1(x) = e^x$.

25. $\displaystyle\int_a^x \bigl(e^{\lambda x} - e^{\lambda t}\bigr)^n y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda^n n!}e^{\lambda x}\left(\frac{1}{e^{\lambda x}}\frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x).$$

26. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{e^{\lambda x} - e^{\lambda t}}\, y(t)\, dt = f(x), \qquad \lambda > 0.$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} e^{\lambda x} \Bigl(e^{-\lambda x} \frac{d}{dx}\Bigr)^2 \int_a^x \frac{e^{\lambda t} f(t)\, dt}{\sqrt{e^{\lambda x} - e^{\lambda t}}}.$$

27. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\, dt}{\sqrt{e^{\lambda x} - e^{\lambda t}}} = f(x), \qquad \lambda > 0.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{\lambda t} f(t)\, dt}{\sqrt{e^{\lambda x} - e^{\lambda t}}}.$$

28. $\displaystyle\int_a^x (e^{\lambda x} - e^{\lambda t})^{\mu} y(t)\, dt = f(x), \qquad \lambda > 0, \quad 0 < \mu < 1.$

Решение:

$$y(x) = k e^{\lambda x} \Bigl(e^{-\lambda x} \frac{d}{dx}\Bigr)^2 \int_a^x \frac{e^{\lambda t} f(t)\, dt}{(e^{\lambda x} - e^{\lambda t})^{\mu}}, \qquad k = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi\mu}.$$

29. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\, dt}{(e^{\lambda x} - e^{\lambda t})^{\mu}} = f(x), \qquad \lambda > 0, \quad 0 < \mu < 1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda \sin(\pi\mu)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{\lambda t} f(t)\, dt}{(e^{\lambda x} - e^{\lambda t})^{1-\mu}}.$$

1.2-2. Ядра уравнений содержат экспоненциальные и степенные функции

30. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A(x-t) + Be^{\lambda(x-t)}\bigr] y(t)\, dt = f(x).$

Дифференцируя по x, получим уравнение вида 2.2.4:

$$By(x) + \int_a^x \bigl[A + B\lambda e^{\lambda(x-t)}\bigr] y(t)\, dt = f'_x(x).$$

31. $\displaystyle\int_a^x (x-t) e^{\lambda(x-t)} y(t)\, dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение: $y(x) = f''_{xx}(x) - 2\lambda f'_x(x) + \lambda^2 f(x)$.

32. $\displaystyle\int_a^x (Ax + Bt + C) e^{\lambda(x-t)} y(t)\, dt = f(x).$

Замена $u(x) = e^{-\lambda x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.1.3:

$$\int_a^x (Ax + Bt + C) u(t)\, dt = e^{-\lambda x} f(x).$$

33. $\displaystyle\int_a^x (Axe^{\lambda t} + Bte^{\mu x}) y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax$, $h_1(t) = e^{\lambda t}$, $g_2(x) = Be$
$h_2(t) = t$.

34. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Axe^{\lambda(x-t)} + Bte^{\mu(x-t)}\bigr] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Axe^{\lambda x}$, $h_1(t) = e^{-}$
$g_2(x) = Be^{\mu x}$, $h_2(t) = te^{-\mu t}$.

35. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^2 e^{\lambda(x-t)} y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = 0.$

Решение: $y(x) = \frac{1}{2}\left[f'''_{xxx}(x) - 3\lambda f''_{xx}(x) + 3\lambda^2 f'_x(x) - \lambda^3 f(x)\right].$

36. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^n e^{\lambda(x-t)} y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f_x^{(n)}(a) = 0.$

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{n!} e^{\lambda x} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[e^{-\lambda x} f(x)\right].$

37. $\displaystyle\int_a^x (Ax^\beta + Be^{\lambda t}) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = Be^{\lambda t}$.

38. $\displaystyle\int_a^x (Ae^{\lambda x} + Bt^\beta) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ae^{\lambda x}$, $h(t) = Bt^\beta$.

39. $\displaystyle\int_a^x (Ax^\beta e^{\lambda t} + Bt^\gamma e^{\mu x}) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\beta$, $h_1(t) = e^{\lambda t}$, $g_2(x) = Be^{\mu x}$, $h_2(t) = t^\gamma$.

40. $\displaystyle\int_a^x e^{\lambda(x-t)} \sqrt{x-t}\, y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} e^{\lambda x} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{e^{-\lambda t} f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}.$$

41. $\displaystyle\int_a^x \frac{e^{\lambda(x-t)}}{\sqrt{x-t}}\, y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} e^{\lambda x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{-\lambda t} f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}.$$

42. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^\lambda e^{\mu(x-t)} y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = ke^{\mu x} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{e^{-\mu t} f(t)\,dt}{(x-t)^\lambda}, \qquad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

43. $\displaystyle\int_a^x \frac{e^{\lambda(x-t)}}{(x-t)^\mu}\, y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \mu < 1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi} e^{\lambda x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{-\lambda t} f(t)}{(x-t)^{1-\mu}}\,dt.$$

44. $\displaystyle\int_a^x \bigl(\sqrt{x}-\sqrt{t}\,\bigr)^{\lambda} e^{\mu(x-t)} y(t)\,dt = f(x), \qquad 0<\lambda<1.$

Замена $u(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.1.48:

$$\int_a^x \bigl(\sqrt{x}-\sqrt{t}\,\bigr)^{\lambda} u(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

45. $\displaystyle\int_a^x \frac{e^{\mu(x-t)}y(t)\,dt}{\bigl(\sqrt{x}-\sqrt{t}\,\bigr)^{\lambda}} = f(x), \qquad 0<\lambda<1.$

Замена $u(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.1.49:

$$\int_a^x \frac{u(t)\,dt}{(\sqrt{x}-\sqrt{t})^{\lambda}} = e^{-\mu x}f(x).$$

46. $\displaystyle\int_a^x \frac{e^{\lambda(x-t)}}{\sqrt{x^2-t^2}}\, y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $\displaystyle y=\frac{2}{\pi}e^{\lambda x}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{te^{-\lambda t}}{\sqrt{x^2-t^2}}f(t)\,dt.$

47. $\displaystyle\int_a^x \exp[\lambda(x^2-t^2)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $y(x)=f'_x(x)-2\lambda x f(x).$

48. $\displaystyle\int_a^x [\exp(\lambda x^2)-\exp(\lambda t^2)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x)=\exp(\lambda x^2)$.

Решение: $\displaystyle y(x)=\frac{1}{2\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{x\exp(\lambda x^2)}\right].$

49. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\exp(\lambda x^2)+B\exp(\lambda t^2)+C\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.5 при $g(x)=\exp(\lambda x^2)$.

50. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\exp(\lambda x^2)+B\exp(\mu t^2)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x)=A\exp(\lambda x^2)$, $h(t)=B\exp(\mu t^2)$.

51. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{x-t}\,\exp[\lambda(x^2-t^2)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{2}{\pi}\exp(\lambda x^2)\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x \frac{\exp(-\lambda t^2)}{\sqrt{x-t}}f(t)\,dt.$$

52. $\displaystyle\int_a^x \frac{\exp[\lambda(x^2-t^2)]}{\sqrt{x-t}}y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{1}{\pi}\exp(\lambda x^2)\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\exp(-\lambda t^2)}{\sqrt{x-t}}f(t)\,dt.$$

53. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^\lambda \exp[\mu(x^2-t^2)]y(t)\,dt = f(x), \qquad 0<\lambda<1.$

Решение:
$$y(x) = k\exp(\mu x^2)\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x \frac{\exp(-\mu t^2)}{(x-t)^\lambda} f(t)\,dt, \qquad k=\frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

54. $\displaystyle\int_a^x \exp[\lambda(x^\beta - t^\beta)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $y(x) = f'_x(x) - \lambda\beta x^{\beta-1}f(x)$.

1.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции

1.3-1. Ядра уравнений содержат гиперболический косинус

1. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $y(x) = f'_x(x) - \lambda^2 \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$.

2. $\displaystyle\int_a^x \bigl\{\operatorname{ch}[\lambda(x-t)]-1\bigr\}y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a)=f'_x(a)=f''_{xx}(x)=0.$

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{\lambda^2}f'''_{xxx}(x) - f'_x(x)$.

3. $\displaystyle\int_a^x \bigl\{\operatorname{ch}[\lambda(x-t)]+b\bigr\}y(t)\,dt = f(x).$

При $b=0$ см. уравнение 1.3.1. При $b=-1$ см. уравнение 1.3.2. При $\lambda=0$ см. уравнение 1.1.1. Дифференцируя уравнение по x, приходим к уравнению вида 2.3.16:
$$y(x)+\frac{\lambda}{b+1}\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = \frac{f'_x(x)}{b+1}.$$

1°. Решение при $b(b+1)<0$:
$$y(x) = \frac{f'_x(x)}{b+1} - \frac{\lambda^2}{k(b+1)^2}\int_a^x \sin[k(x-t)]f'_t(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad k=\lambda\sqrt{\frac{-b}{b+1}}.$$

2°. Решение при $b(b+1)>0$:
$$y(x) = \frac{f'_x(x)}{b+1} - \frac{\lambda^2}{k(b+1)^2}\int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)]f'_t(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad k=\lambda\sqrt{\frac{b}{b+1}}.$$

4. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{ch}(\lambda x+\beta t)y(t)\,dt = f(x).$

При $\beta=-\lambda$ см. уравнение 1.3.1.

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим
$$\operatorname{ch}[(\lambda+\beta)x]y(x)+\lambda\int_a^x \operatorname{sh}(\lambda x+\beta t)y(t)\,dt = f'_x(x), \tag{1}$$
$$\bigl\{\operatorname{ch}[(\lambda+\beta)x]y(x)\bigr\}'_x + \lambda\operatorname{sh}[(\lambda+\beta)x]y(x) + \lambda^2\int_a^x \operatorname{ch}(\lambda x+\beta t)y(t)\,dt = f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$w'_x + \lambda\,\mathrm{th}[(\lambda+\beta)x]w = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x), \qquad w = \mathrm{ch}[(\lambda+\beta)x]y(x). \tag{3}$$

Полагая $x = a$ в равенстве (1), имеем начальное условие $w(a) = f'_x(a)$. Решив уравнение (3) с этим условием, после некоторых преобразований получим решение исходного интегрального уравнения в виде

$$y(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}[(\lambda+\beta)x]} f'_x(x) - \frac{\lambda\,\mathrm{sh}[(\lambda+\beta)x]}{\mathrm{ch}^2[(\lambda+\beta)x]} f(x) + \\ + \frac{\lambda\beta}{\mathrm{ch}^{k+1}[(\lambda+\beta)x]} \int_a^x f(t)\,\mathrm{ch}^{k-2}[(\lambda+\beta)t]\,dt, \qquad k = \frac{\lambda}{\lambda+\beta}.$$

5. $\displaystyle\int_a^x [\mathrm{ch}(\lambda x) - \mathrm{ch}(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \mathrm{ch}(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\mathrm{sh}(\lambda x)}\right].$

6. $\displaystyle\int_a^x [A\,\mathrm{ch}(\lambda x) + B\,\mathrm{ch}(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.5. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \mathrm{ch}(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\left[\mathrm{ch}(\lambda x)\right]^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x \left[\mathrm{ch}(\lambda t)\right]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$

7. $\displaystyle\int_a^x \left[A\,\mathrm{ch}(\lambda x) + B\,\mathrm{ch}(\mu t) + C\right] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\,\mathrm{ch}(\lambda x)$, $h(t) = B\,\mathrm{ch}(\mu t) + C$.

8. $\displaystyle\int_a^x \left\{A_1\,\mathrm{ch}[\lambda_1(x-t)] + A_2\,\mathrm{ch}[\lambda_2(x-t)]\right\} y(t)\,dt = f(x).$

Это уравнение эквивалентно уравнению вида 1.3.41:

$$\int_a^x \left\{B_1\,\mathrm{sh}[\lambda_1(x-t)] + B_2\,\mathrm{sh}[\lambda_2(x-t)]\right\} y(t)\,dt = F(x),$$
$$B_1 = \frac{A_1}{\lambda_1}, \quad B_2 = \frac{A_2}{\lambda_2}, \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

(Дифференцируя это уравнение, получим исходное интегральное уравнение.)

9. $\displaystyle\int_a^x \mathrm{ch}^2[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Дифференцируя, приходим к уравнению вида 2.3.16:

$$y(x) + \lambda\int_a^x \mathrm{sh}[2\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f'_x(x).$$

Решение:

$$y(x) = f'_x(x) - \frac{2\lambda^2}{k}\int_a^x \mathrm{sh}[k(x-t)]f'_t(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad k = \lambda\sqrt{2}.$$

10. $\displaystyle\int_a^x \big[\mathrm{ch}^2(\lambda x) - \mathrm{ch}^2(\lambda t)\big] y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f'_x(x)}{\mathrm{sh}(2\lambda x)}\right].$

11. $\displaystyle\int_a^x \big[A\,\mathrm{ch}^2(\lambda x) + B\,\mathrm{ch}^2(\lambda t)\big] y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.10. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \mathrm{ch}^2(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\big[\mathrm{ch}(\lambda x)\big]^{-\frac{2A}{A+B}} \int_a^x \big[\mathrm{ch}(\lambda t)\big]^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

12. $\displaystyle\int_a^x \big[A\,\mathrm{ch}^2(\lambda x) + B\,\mathrm{ch}^2(\mu t) + C\big] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\,\mathrm{ch}^2(\lambda x)$, $h(t) = B\,\mathrm{ch}^2(\mu t) + C$.

13. $\displaystyle\int_a^x \mathrm{ch}[\lambda(x-t)]\,\mathrm{ch}[\lambda(x+t)] y(t)\,dt = f(x).$

Используя формулу

$$\mathrm{ch}(\alpha-\beta)\,\mathrm{ch}(\alpha+\beta) = \tfrac{1}{2}[\cos(2\alpha) + \cos(2\beta)], \quad \alpha = \lambda x, \quad \beta = \lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.3.6 при $A = B = 1$:

$$\int_a^x [\mathrm{ch}(2\lambda x) + \mathrm{ch}(2\lambda t)] y(t)\,dt = 2f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}(2\lambda x)}} \int_a^x \frac{f'_t(t)\,dt}{\sqrt{\mathrm{ch}(2\lambda t)}}\right].$$

14. $\displaystyle\int_a^x [\mathrm{ch}(\lambda x)\,\mathrm{ch}(\mu t) + \mathrm{ch}(\beta x)\,\mathrm{ch}(\gamma t)] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \mathrm{ch}(\lambda x)$, $h_1(t) = \mathrm{ch}(\mu t)$, $g_2(x) = \mathrm{ch}(\beta x)$, $h_2(t) = \mathrm{ch}(\gamma t)$.

15. $\displaystyle\int_a^x \mathrm{ch}^3[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x).$

Используя формулу $\mathrm{ch}^3\beta = \frac{1}{4}\,\mathrm{ch}\,3\beta + \frac{3}{4}\,\mathrm{ch}\,\beta$, приходим к уравнению вида 1.3.8:

$$\int_a^x \left\{\tfrac{1}{4}\,\mathrm{ch}[3\lambda(x-t)] + \tfrac{3}{4}\,\mathrm{ch}[\lambda(x-t)]\right\} y(t)\,dt = f(x).$$

16. $\displaystyle\int_a^x \big[\mathrm{ch}^3(\lambda x) - \mathrm{ch}^3(\lambda t)\big] y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{3\lambda}\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f'_x(x)}{\mathrm{sh}(\lambda x)\,\mathrm{ch}^2(\lambda x)}\right].$

17. $\displaystyle\int_a^x \big[A\,\mathrm{ch}^3(\lambda x) + B\,\mathrm{ch}^3(\lambda t)\big] y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.16. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \mathrm{ch}^3(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\big[\mathrm{ch}(\lambda x)\big]^{-\frac{3A}{A+B}} \int_a^x \big[\mathrm{ch}(\lambda t)\big]^{-\frac{3B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

18. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{ch}^2(\lambda x)\operatorname{ch}(\mu t) + B\operatorname{ch}(\beta x)\operatorname{ch}^2(\gamma t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A\operatorname{ch}^2(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{ch}(\mu t)$, $g_2(x) = B\operatorname{ch}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{ch}^2(\gamma t)$.

19. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{ch}^4[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Преобразуем ядро интегрального уравнения с помощью формулы

$$\operatorname{ch}^4\beta = \tfrac{1}{8}\operatorname{ch}4\beta + \tfrac{1}{2}\operatorname{ch}2\beta + \tfrac{3}{8}, \quad \text{где} \quad \beta = \lambda(x-t),$$

а затем продифференцируем уравнение по x. В результате приходим к уравнению вида 2.3.18:

$$y(x) + \lambda\int_a^x \bigl\{\tfrac{1}{2}\operatorname{sh}[4\lambda(x-t)] + \operatorname{sh}[2\lambda(x-t)]\bigr\}y(t)\,dt = f'_x(x).$$

20. $\displaystyle\int_a^x [\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)]^n y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям: $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f^{(n)}_x(a) = 0$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\lambda^n n!}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}(\lambda x)}\frac{d}{dx}\right]^{n+1} f(x).$

21. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}t}\, y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{sh}x\left(\frac{1}{\operatorname{sh}x}\frac{d}{dx}\right)^2\int_a^x \frac{\operatorname{sh}t\, f(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}t}}.$$

22. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}t}} = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\operatorname{sh}t\, f(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}t}}.$$

23. $\displaystyle\int_a^x (\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}t)^\lambda y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = k\operatorname{sh}x\left(\frac{1}{\operatorname{sh}x}\frac{d}{dx}\right)^2\int_a^x \frac{\operatorname{sh}t\, f(t)\,dt}{(\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}t)^\lambda}, \qquad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

24. $\displaystyle\int_a^x (\operatorname{ch}^\mu x - \operatorname{ch}^\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{ch}^\mu x$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}^{\mu-1}x}\right].$

25. $\displaystyle\int_a^x (A\operatorname{ch}^\mu x + B\operatorname{ch}^\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.24. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{ch}^\mu x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\bigl[\operatorname{ch}(\lambda x)\bigr]^{-\frac{A\mu}{A+B}}\int_a^x \bigl[\operatorname{ch}(\lambda t)\bigr]^{-\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

26. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^\lambda} = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\operatorname{sh} t\, f(t)\,dt}{(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^{1-\lambda}}.$$

27. $\displaystyle\int_a^x (x-t) \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Дифференцируя уравнение дважды, имеем

$$y(x) + 2\lambda \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t)\,dt + \lambda^2 \int_a^x (x-t) \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f''_{xx}(x).$$

Исключая отсюда третье слагаемое в правой части с помощью исходного уравнения, приходим к уравнению вида 2.3.16:

$$y(x) + 2\lambda \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x).$$

28. $\displaystyle\int_a^x \frac{\operatorname{ch}\left(\lambda\sqrt{x-t}\,\right)}{\sqrt{x-t}}\, y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\cos\left(\lambda\sqrt{x-t}\,\right)}{\sqrt{x-t}} f(t)\,dt.$$

29. $\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{ch}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\,\right)}{\sqrt{x^2-t^2}}\, y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x t\, \frac{\cos\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\,\right)}{\sqrt{x^2-t^2}} f(t)\,dt.$$

30. $\displaystyle\int_x^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\,\right)}{\sqrt{t^2-x^2}}\, y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^\infty t\, \frac{\cos\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\,\right)}{\sqrt{t^2-x^2}} f(t)\,dt.$$

31. $\displaystyle\int_a^x \left[Ax^\beta + B \operatorname{ch}^\gamma(\lambda t) + C\right] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B \operatorname{ch}^\gamma(\lambda t) + C$.

32. $\displaystyle\int_a^x \left[A \operatorname{ch}^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C\right] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ch}^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

33. $\displaystyle\int_a^x \left(Ax^\lambda \operatorname{ch}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{ch}^\gamma x\right) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{ch}^\mu t$, $g_2(x) = B \operatorname{ch}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.3-2. Ядра уравнений содержат гиперболический синус

34. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{\lambda} f''_{xx}(x) - \lambda f(x)$.

35. $\displaystyle\int_a^x \{\operatorname{sh}[\lambda(x-t)] + b\} y(t)\,dt = f(x).$

Дифференцируя уравнение по x, приходим к уравнению вида 2.3.3:

$$y(x) + \frac{\lambda}{b}\int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = \frac{1}{b} f'_x(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{b} f'_x(x) + \int_a^x R(x-t) f'_t(t)\,dt,$$

$$R(x) = \frac{\lambda}{b^2}\exp\left(-\frac{\lambda x}{2b}\right)\left[\frac{\lambda}{2bk}\operatorname{sh}(kx) - \operatorname{ch}(kx)\right], \quad k = \frac{\lambda\sqrt{1+4b^2}}{2b}.$$

36. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{sh}(\lambda x + \beta t) y(t)\,dt = f(x).$

При $\beta = -\lambda$ см. уравнение 1.3.34. Пусть $\beta \neq -\lambda$.

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$\operatorname{sh}[(\lambda+\beta)x]y(x) + \lambda\int_a^x \operatorname{ch}(\lambda x + \beta t)y(t)\,dt = f'_x(x), \tag{1}$$

$$\bigl\{\operatorname{sh}[(\lambda+\beta)x]y(x)\bigr\}'_x + \lambda\operatorname{ch}[(\lambda+\beta)x]y(x) + \lambda^2\int_a^x \operatorname{sh}(\lambda x + \beta t)y(t)\,dt = f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$w'_x + \lambda\operatorname{cth}[(\lambda+\beta)x]w = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x), \qquad w = \operatorname{sh}[(\lambda+\beta)x]y(x). \tag{3}$$

Полагая $x = a$ в равенстве (1), имеем начальное условие $w(a) = f'_x(a)$. Решив уравнение (3) с этим условием, после некоторых преобразований получим решение исходного интегрального уравнения в виде

$$y(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}[(\lambda+\beta)x]} f'_x(x) - \frac{\lambda\operatorname{ch}[(\lambda+\beta)x]}{\operatorname{sh}^2[(\lambda+\beta)x]} f(x) -$$
$$- \frac{\lambda\beta}{\operatorname{sh}^{k+1}[(\lambda+\beta)x]}\int_a^x f(t)\operatorname{sh}^{k-2}[(\lambda+\beta)t]\,dt, \qquad k = \frac{\lambda}{\lambda+\beta}.$$

37. $\displaystyle\int_a^x [\operatorname{sh}(\lambda x) - \operatorname{sh}(\lambda t)] y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{sh}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f'_x(x)}{\operatorname{ch}(\lambda x)}\right]$.

38. $\displaystyle\int_a^x [A\operatorname{sh}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda t)] y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.37. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{sh}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{A+B}\dfrac{d}{dx}\left\{\bigl[\operatorname{sh}(\lambda x)\bigr]^{-\frac{A}{A+B}}\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{sh}(\lambda t)\bigr]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}$.

39. $\displaystyle\int_a^x [A\operatorname{sh}(\lambda x)+B\operatorname{sh}(\mu t)]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x)=A\operatorname{sh}(\lambda x)$, $h(t)=B\operatorname{sh}(\mu t)$.

40. $\displaystyle\int_a^x \bigl\{\mu\operatorname{sh}[\lambda(x-t)]-\lambda\operatorname{sh}[\mu(x-t)]\bigr\}y(t)\,dt=f(x).$

Считается, что выполнены условия $f(a)=f'_x(a)=f''_{xx}(a)=f'''_{xxx}(a)=0$. Решение:

$$y(x)=\frac{f''''_{xxxx}-(\lambda^2+\mu^2)f''_{xx}+\lambda^2\mu^2 f}{\mu\lambda^3-\lambda\mu^3},\qquad f=f(x).$$

41. $\displaystyle\int_a^x \bigl\{A_1\operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)]+A_2\operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)]\bigr\}y(t)\,dt=f(x),\quad f(a)=f'_x(a)=0.$

1°. Введем обозначения

$$I_1=\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)]y(t)\,dt,\quad I_2=\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)]y(t)\,dt,$$
$$J_1=\int_a^x \operatorname{ch}[\lambda_1(x-t)]y(t)\,dt,\quad J_2=\int_a^x \operatorname{ch}[\lambda_2(x-t)]y(t)\,dt.$$

Продифференцируем последовательно интегральное уравнение четыре раза. В результате имеем (первым записано исходное уравнение)

$$A_1I_1+A_2I_2=f,\qquad f=f(x), \tag{1}$$
$$A_1\lambda_1J_1+A_2\lambda_2J_2=f'_x, \tag{2}$$
$$(A_1\lambda_1+A_2\lambda_2)y+A_1\lambda_1^2I_1+A_2\lambda_2^2I_2=f''_{xx}, \tag{3}$$
$$(A_1\lambda_1+A_2\lambda_2)y'_x+A_1\lambda_1^3J_1+A_2\lambda_2^3J_2=f'''_{xxx}, \tag{4}$$
$$(A_1\lambda_1+A_2\lambda_2)y''_{xx}+(A_1\lambda_1^3+A_2\lambda_2^3)y+A_1\lambda_1^4I_1+A_2\lambda_2^4I_2=f''''_{xxxx}. \tag{5}$$

Исключая из равенств (1), (3), (5) величины I_1 и I_2, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$(A_1\lambda_1+A_2\lambda_2)y''_{xx}-\lambda_1\lambda_2(A_1\lambda_2+A_2\lambda_1)y=f''''_{xxxx}-(\lambda_1^2+\lambda_2^2)f''_{xx}+\lambda_1^2\lambda_2^2f. \tag{6}$$

Подставляя значение $x=a$ в равенства (3) и (4), получим начальные условия

$$(A_1\lambda_1+A_2\lambda_2)y(a)=f''_{xx}(a),\quad (A_1\lambda_1+A_2\lambda_2)y'_x(a)=f'''_{xxx}(a). \tag{7}$$

Решение дифференциального уравнения (6) с условиями (7) позволяет найти решение интегрального уравнения.

2°. Обозначим

$$\Delta=\lambda_1\lambda_2\frac{A_1\lambda_2+A_2\lambda_1}{A_1\lambda_1+A_2\lambda_2}.$$

2.1. Решение при $\Delta>0$:

$$(A_1\lambda_1+A_2\lambda_2)y(x)=f''_{xx}(x)+Bf(x)+C\int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)]f(t)\,dt,$$
$$k=\sqrt{\Delta},\quad B=\Delta-\lambda_1^2-\lambda_2^2,\quad C=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\bigl[\Delta^2-(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\Delta+\lambda_1^2\lambda_2^2\bigr].$$

2.2. Решение при $\Delta<0$:

$$(A_1\lambda_1+A_2\lambda_2)y(x)=f''_{xx}(x)+Bf(x)+C\int_a^x \sin[k(x-t)]f(t)\,dt,$$
$$k=\sqrt{-\Delta},\quad B=\Delta-\lambda_1^2-\lambda_2^2,\quad C=\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\bigl[\Delta^2-(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\Delta+\lambda_1^2\lambda_2^2\bigr].$$

2.3. Решение при $\Delta = 0$:

$$(A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2)y(x) = f''_{xx}(x) - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)f(x) + \lambda_1^2\lambda_2^2 \int_a^x (x-t)f(t)\,dt.$$

2.4. Решение при $\Delta = \infty$:

$$y(x) = \frac{f''''_{xxxx} - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)f''_{xx} + \lambda_1^2\lambda_2^2 f}{A_1\lambda_1^3 + A_2\lambda_2^3}, \qquad f = f(x).$$

В последнем случае выполняется равенство $A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0$ и правая часть интегрального уравнения удовлетворяет условиям $f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0$.

42. $\displaystyle\int_a^x \bigl\{A\,\mathrm{sh}[\lambda(x-t)] + B\,\mathrm{sh}[\mu(x-t)] + C\,\mathrm{sh}[\beta(x-t)]\bigr\}y(t)\,dt = f(x).$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = 0$. Продифференцируем интегральное уравнение два раза. В результате имеем

$$(A\lambda + B\mu + C\beta)y(x) + \int_a^x \bigl\{A\lambda^2\,\mathrm{sh}[\lambda(x-t)] + B\mu^2\,\mathrm{sh}[\mu(x-t)]\bigr\}y(t)\,dt + {}$$
$$+ C\beta^2 \int_a^x \mathrm{sh}[\beta(x-t)]y(t)\,dt = f''_{xx}(x).$$

Исключая отсюда последний интеграл с помощью исходного уравнения, приходим к уравнению вида 2.3.18:

$$(A\lambda + B\mu + C\beta)y(x) +$$
$$+ \int_a^x \bigl\{A(\lambda^2 - \beta^2)\,\mathrm{sh}[\lambda(x-t)] + B(\mu^2 - \beta^2)\,\mathrm{sh}[\mu(x-t)]\bigr\}y(t)\,dt = f''_{xx}(x) - \beta^2 f(x).$$

В частном случае $A\lambda + B\mu + C\beta = 0$ это уравнение вида 1.3.41.

43. $\displaystyle\int_a^x \mathrm{sh}^2[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = 0.$

Дифференцируя, приходим к уравнению вида 1.3.34:

$$\int_a^x \mathrm{sh}[2\lambda(x-t)]y(t)\,dt = \frac{1}{\lambda} f'_x(x).$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{2}\lambda^{-2} f'''_{xxx}(x) - 2f'_x(x)$.

44. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\mathrm{sh}^2(\lambda x) - \mathrm{sh}^2(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\mathrm{sh}(2\lambda x)}\right].$

45. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\,\mathrm{sh}^2(\lambda x) + B\,\mathrm{sh}^2(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.44. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \mathrm{sh}^2(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\bigl[\mathrm{sh}(\lambda x)\bigr]^{-\frac{2A}{A+B}} \int_a^x \bigl[\mathrm{sh}(\lambda t)\bigr]^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

46. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\,\mathrm{sh}^2(\lambda x) + B\,\mathrm{sh}^2(\mu t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\,\mathrm{sh}^2(\lambda x)$, $h(t) = B\,\mathrm{sh}^2(\mu t)$.

47. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\operatorname{sh}[\lambda(x+t)]y(t)\,dt = f(x).$

Используя формулу

$$\operatorname{sh}(\alpha-\beta)\operatorname{sh}(\alpha+\beta) = \tfrac{1}{2}[\operatorname{ch}(2\alpha)-\operatorname{ch}(2\beta)], \quad \alpha=\lambda x, \quad \beta=\lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.3.5:

$$\int_a^x [\operatorname{ch}(2\lambda x)-\operatorname{ch}(2\lambda t)]y(t)\,dt = 2f(x).$$

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{sh}(2\lambda x)}\right].$

48. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{sh}(\lambda x)\operatorname{sh}(\mu t)+B\operatorname{sh}(\beta x)\operatorname{sh}(\gamma t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A\operatorname{sh}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{sh}(\mu t)$, $g_2(x) = B\operatorname{sh}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{sh}(\gamma t)$.

49. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{sh}^3[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a)=f'_x(a)=f''_{xx}(a)=f'''_{xxx}(a)=0.$

Используя формулу $\operatorname{sh}^3\beta = \frac{1}{4}\operatorname{sh}3\beta - \frac{3}{4}\operatorname{sh}\beta$, приходим к уравнению вида 1.3.41:

$$\int_a^x \bigl\{\tfrac{1}{4}\operatorname{sh}[3\lambda(x-t)]-\tfrac{3}{4}\operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\bigr\}y(t)\,dt = f(x).$$

50. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{sh}^3(\lambda x)-\operatorname{sh}^3(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a)=f'_x(a)=0.$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{sh}^3(\lambda x)$.

51. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{sh}^3(\lambda x)+B\operatorname{sh}^3(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{sh}^3(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\bigl[\operatorname{sh}(\lambda x)\bigr]^{-\frac{3A}{A+B}}\int_a^x \bigl[\operatorname{sh}(\lambda t)\bigr]^{-\frac{3B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

52. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{sh}^2(\lambda x)\operatorname{sh}(\mu t)+B\operatorname{sh}(\beta x)\operatorname{sh}^2(\gamma t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A\operatorname{sh}^2(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{sh}(\mu t)$, $g_2(x) = B\operatorname{sh}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{sh}^2(\gamma t)$.

53. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{sh}^4[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Здесь $f(a)=f'_x(a)=\cdots=f''''_{xxxx}(a)=0$.

Преобразуем ядро интегрального уравнения с помощью формулы

$$\operatorname{sh}^4\beta = \tfrac{1}{8}\operatorname{ch}4\beta - \tfrac{1}{2}\operatorname{ch}2\beta + \tfrac{3}{8}, \quad \text{где} \quad \beta=\lambda(x-t),$$

а затем продифференцируем уравнение по x. В результате приходим к уравнению вида 1.3.41:

$$\lambda\int_a^x \bigl\{\tfrac{1}{2}\operatorname{sh}[4\lambda(x-t)]-\operatorname{sh}[2\lambda(x-t)]\bigr\}y(t)\,dt = f'_x(x).$$

54. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{sh}^n[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 2, 3, \ldots$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f_x^{(n)}(a) = 0$.

Продифференцируем дважды уравнение по x. Преобразуем ядро полученного интегрального уравнения с помощью равенства $\operatorname{ch}^2\beta = 1 + \operatorname{sh}^2\beta$, где $\beta = \lambda(x-t)$. В результате имеем

$$\lambda^2 n^2 \int_a^x \operatorname{sh}^n[\lambda(x-t)]y(t)\,dt + \lambda^2 n(n-1)\int_a^x \operatorname{sh}^{n-2}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f''_{xx}(x).$$

Исключая отсюда первое слагаемое в левой части с помощью исходного уравнения, получим

$$\int_a^x \operatorname{sh}^{n-2}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = \frac{1}{\lambda^2 n(n-1)}\left[f''_{xx}(x) - \lambda^2 n^2 f(x)\right].$$

Это уравнение такого же вида, что и исходное; при этом степень, характеризующая ядро преобразованного уравнения, уменьшилась на две единицы.

Используя указанный прием достаточное число раз, в итоге можно прийти к простейшим интегральным уравнениям вида 1.1.1 (при четном n) или 1.3.34 (при нечетном n).

55. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{sh}\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\,\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi\lambda}\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x \frac{\cos\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\,\bigr)}{\sqrt{x-t}}f(t)\,dt.$$

56. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}\,y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{ch} x\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\frac{d}{dx}\right)^2\int_a^x \frac{\operatorname{ch} t\, f(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}}.$$

57. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\operatorname{ch} t\, f(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}}.$$

58. $\displaystyle\int_a^x (\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^\lambda y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = k\operatorname{ch} x\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\frac{d}{dx}\right)^2\int_a^x \frac{\operatorname{ch} t\, f(t)\,dt}{(\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^\lambda}, \qquad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

59. $\displaystyle\int_a^x (\operatorname{sh}^\mu x - \operatorname{sh}^\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{sh}^\mu x$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{ch} x\operatorname{sh}^{\mu-1} x}\right].$

60. $\displaystyle\int_a^x \big[A\,\mathrm{sh}^\mu(\lambda x) + B\,\mathrm{sh}^\mu(\lambda t)\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \mathrm{sh}^\mu(\lambda x)$.

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\,\frac{d}{dx}\left\{\big[\mathrm{sh}(\lambda x)\big]^{-\frac{A\mu}{A+B}} \int_a^x \big[\mathrm{sh}(\lambda t)\big]^{-\frac{B\mu}{A+B}} f_t'(t)\,dt\right\}.$$

61. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{(\mathrm{sh}\,x - \mathrm{sh}\,t)^\lambda} = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi}\,\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\mathrm{ch}\,t\,f(t)\,dt}{(\mathrm{sh}\,x - \mathrm{sh}\,t)^{1-\lambda}}.$$

62. $\displaystyle\int_a^x (x-t)\,\mathrm{sh}[\lambda(x-t)]\,y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f_x'(a) = f_{xx}''(a) = 0.$

Дифференцируя дважды, получим

$$2\lambda\int_a^x \mathrm{ch}[\lambda(x-t)]\,y(t)\,dt + \lambda^2\int_a^x (x-t)\,\mathrm{sh}[\lambda(x-t)]\,y(t)\,dt = f_{xx}''(x).$$

Исключая второй интеграл в левой части этого выражения с помощью исходного уравнения, приходим к уравнению вида 1.3.1:

$$\int_a^x \mathrm{ch}[\lambda(x-t)]\,y(t)\,dt = \frac{1}{2\lambda}\big[f_{xx}''(x) - \lambda^2 f(x)\big].$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda}f_{xxx}'''(x) - \lambda f_x'(x) + \frac{1}{2}\lambda^3\int_a^x f(t)\,dt.$$

63. $\displaystyle\int_a^x \big[Ax^\beta + B\,\mathrm{sh}^\gamma(\lambda t) + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B\,\mathrm{sh}^\gamma(\lambda t) + C$.

64. $\displaystyle\int_a^x \big[A\,\mathrm{sh}^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\,\mathrm{sh}^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

65. $\displaystyle\int_a^x \big(Ax^\lambda\,\mathrm{sh}^\mu t + Bt^\beta\,\mathrm{sh}^\gamma x\big)\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \mathrm{sh}^\mu t$, $g_2(x) = B\,\mathrm{sh}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.3-3. Ядра уравнений содержат гиперболический тангенс

66. $\displaystyle\int_a^x \big[\mathrm{th}(\lambda x) - \mathrm{th}(\lambda t)\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \mathrm{th}(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\lambda}\big[\mathrm{ch}^2(\lambda x) f_x'(x)\big]_x'.$

67. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{th}(\lambda x)+B\operatorname{th}(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

При $B=-A$ см. уравнение 1.3.66. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x)=\operatorname{th}(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x)=\frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\biggl\{\bigl[\operatorname{th}(\lambda x)\bigr]^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x\bigl[\operatorname{th}(\lambda t)\bigr]^{-\frac{B}{A+B}}f'_t(t)\,dt\biggr\}.$

68. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{th}(\lambda x)+B\operatorname{th}(\mu t)+C\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x)=A\operatorname{th}(\lambda x)$, $h(t)=B\operatorname{th}(\mu t)+C$.

69. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{th}^2(\lambda x)-\operatorname{th}^2(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x)=\operatorname{th}^2(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{ch}^3(\lambda x)f'_x(x)}{2\lambda\operatorname{sh}(\lambda x)}\right].$

70. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{th}^2(\lambda x)+B\operatorname{th}^2(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

При $B=-A$ см. уравнение 1.3.69. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x)=\operatorname{th}^2(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x)=\frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\biggl\{\bigl[\operatorname{th}(\lambda x)\bigr]^{-\frac{2A}{A+B}}\int_a^x\bigl[\operatorname{th}(\lambda t)\bigr]^{-\frac{2B}{A+B}}f'_t(t)\,dt\biggr\}.$

71. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{th}^2(\lambda x)+B\operatorname{th}^2(\mu t)+C\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x)=A\operatorname{th}^2(\lambda x)$, $h(t)=B\operatorname{th}^2(\mu t)+C$.

72. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{th}(\lambda x)-\operatorname{th}(\lambda t)\bigr]^n y(t)\,dt=f(x),\qquad n=1,2,\dots$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям: $f(a)=f'_x(a)=\cdots=f^{(n)}_x(a)=0$.

Решение: $\displaystyle y(x)=\frac{1}{\lambda^n n!\operatorname{ch}^2(\lambda x)}\left[\operatorname{ch}^2(\lambda x)\frac{d}{dx}\right]^{n+1}f(x).$

73. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{\operatorname{th}x-\operatorname{th}t}\,y(t)\,dt=f(x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{2}{\pi\operatorname{ch}^2x}\left(\operatorname{ch}^2x\,\frac{d}{dx}\right)^2\int_a^x\frac{f(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2t\sqrt{\operatorname{th}x-\operatorname{th}t}}.$$

74. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{th}x-\operatorname{th}t}}=f(x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{f(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2t\sqrt{\operatorname{th}x-\operatorname{th}t}}.$$

75. $\displaystyle\int_a^x (\operatorname{th}x-\operatorname{th}t)^\lambda y(t)\,dt=f(x),\qquad 0<\lambda<1.$

Решение:

$$y(x)=\frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda\operatorname{ch}^2x}\left(\operatorname{ch}^2x\frac{d}{dx}\right)^2\int_a^x\frac{f(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2t\,(\operatorname{th}x-\operatorname{th}t)^\lambda}.$$

76. $\displaystyle\int_a^x (\operatorname{th}^\mu x - \operatorname{th}^\mu t) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{th}^\mu x$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{ch}^{\mu+1} x f'_x(x)}{\operatorname{sh}^{\mu-1} x}\right].$

77. $\displaystyle\int_a^x (A\operatorname{th}^\mu x + B\operatorname{th}^\mu t) y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.76. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{th}^\mu x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\left[\operatorname{th}(\lambda x)\right]^{-\frac{A\mu}{A+B}} \int_a^x \left[\operatorname{th}(\lambda t)\right]^{-\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

78. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{[\operatorname{th}(\lambda x) - \operatorname{th}(\lambda t)]^\mu} = f(x), \qquad 0 < \mu < 1.$

Частный случай уравнения 1.9.42 при $g(x) = \operatorname{th}(\lambda x)$, $h(x) \equiv 1$.

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda\sin(\pi\mu)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2(\lambda t)[\operatorname{th}(\lambda x) - \operatorname{th}(\lambda t)]^{1-\mu}}.$$

79. $\displaystyle\int_a^x \left[Ax^\beta + B\operatorname{th}^\gamma(\lambda t) + C\right] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B\operatorname{th}^\gamma(\lambda t) + C$.

80. $\displaystyle\int_a^x \left[A\operatorname{th}^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C\right] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{th}^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

81. $\displaystyle\int_a^x \left(Ax^\lambda \operatorname{th}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{th}^\gamma x\right) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{th}^\mu t$, $g_2(x) = B\operatorname{th}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.3-4. Ядра уравнений содержат гиперболический котангенс

82. $\displaystyle\int_a^x \left[\operatorname{cth}(\lambda x) - \operatorname{cth}(\lambda t)\right] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{cth}(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = -\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sh}^2(\lambda x) f'_x(x)\right].$

83. $\displaystyle\int_a^x \left[A\operatorname{cth}(\lambda x) + B\operatorname{cth}(\lambda t)\right] y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.82. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{cth}(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\left[\operatorname{th}(\lambda x)\right]^{\frac{A}{A+B}} \int_a^x \left[\operatorname{th}(\lambda t)\right]^{\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$

84. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{cth}(\lambda x) + B\operatorname{cth}(\mu t) + C\bigr]\, y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{cth}(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{cth}(\mu t) + C$.

85. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{cth}^2(\lambda x) - \operatorname{cth}^2(\lambda t)\bigr]\, y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{cth}^2(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = -\frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{sh}^3(\lambda x) f'_x(x)}{2\lambda\operatorname{ch}(\lambda x)}\right].$

86. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{cth}^2(\lambda x) + B\operatorname{cth}^2(\lambda t)\bigr]\, y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.85. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{cth}^2(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\bigl[\operatorname{th}(\lambda x)\bigr]^{\frac{2A}{A+B}} \int_a^x \bigl[\operatorname{th}(\lambda t)\bigr]^{\frac{2B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$

87. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{cth}^2(\lambda x) + B\operatorname{cth}^2(\mu t) + C\bigr]\, y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{cth}^2(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{cth}^2(\mu t) + C$.

88. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{cth}(\lambda x) - \operatorname{cth}(\lambda t)\bigr]^n\, y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \dots$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям: $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f^{(n)}_x(a) = 0$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{(-1)^n}{\lambda^n n!\operatorname{sh}^2(\lambda x)}\left[\operatorname{sh}^2(\lambda x)\frac{d}{dx}\right]^{n+1} f(x).$

89. $\displaystyle\int_a^x (\operatorname{cth}^\mu x - \operatorname{cth}^\mu t)\, y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{cth}^\mu x$.

Решение: $\displaystyle y(x) = -\frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{sh}^{\mu+1} x\, f'_x(x)}{\operatorname{ch}^{\mu-1} x}\right].$

90. $\displaystyle\int_a^x \bigl(A\operatorname{cth}^\mu x + B\operatorname{cth}^\mu t\bigr)\, y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.89. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{cth}^\mu x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\bigl|\operatorname{th} x\bigr|^{\frac{A\mu}{A+B}} \int_a^x \bigl|\operatorname{th} t\bigr|^{\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

91. $\displaystyle\int_a^x [Ax^\beta + B\operatorname{cth}^\gamma(\lambda t) + C]\, y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B\operatorname{cth}^\gamma(\lambda t) + C$.

92. $\displaystyle\int_a^x [A\operatorname{cth}^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C]\, y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{cth}^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

93. $\displaystyle\int_a^x \left(Ax^\lambda \operatorname{cth}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{cth}^\gamma x\right) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{cth}^\mu t$, $g_2(x) = B \operatorname{cth}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.3-5. Ядра уравнений содержат комбинации гиперболических функций

94. $\displaystyle\int_a^x \bigl\{\operatorname{ch}[\lambda(x-t)] + A \operatorname{sh}[\mu(x-t)]\bigr\} y(t)\,dt = f(x).$

Продифференцируем уравнение по x, а затем исключим интеграл с гиперболическим косинусом. В результате приходим к уравнению вида 2.3.16:

$$y(x) + (\lambda - A^2\mu) \int_a^x \operatorname{sh}[\mu(x-t)] y(t)\,dt = f'_x(x) - A\mu f(x).$$

95. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\mu t) + C\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ch}(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{sh}(\mu t) + C$.

96. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A \operatorname{ch}^2(\lambda x) + B \operatorname{sh}^2(\mu t) + C\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ch}^2(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{sh}^2(\mu t) + C$.

97. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{ch}[\lambda(x+t)] y(t)\,dt = f(x).$

Используя формулу

$$\operatorname{sh}(\alpha-\beta)\operatorname{ch}(\alpha+\beta) = \tfrac{1}{2}\bigl[\operatorname{sh}(2\alpha) - \operatorname{sh}(2\beta)\bigr], \qquad \alpha = \lambda x, \qquad \beta = \lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.3.37:

$$\int_a^x \bigl[\operatorname{sh}(2\lambda x) - \operatorname{sh}(2\lambda t)\bigr] y(t)\,dt = 2f(x).$$

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{ch}(2\lambda x)}\right].$

98. $\displaystyle\int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] \operatorname{sh}[\lambda(x+t)] y(t)\,dt = f(x).$

Используя формулу

$$\operatorname{ch}(\alpha-\beta)\operatorname{sh}(\alpha+\beta) = \tfrac{1}{2}\bigl[\operatorname{sh}(2\alpha) + \operatorname{sh}(2\beta)\bigr], \qquad \alpha = \lambda x, \qquad \beta = \lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.3.38 при $A = B = 1$:

$$\int_a^x \bigl[\operatorname{sh}(2\lambda x) + \operatorname{sh}(2\lambda t)\bigr] y(t)\,dt = 2f(x).$$

99. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A \operatorname{ch}(\lambda x) \operatorname{sh}(\mu t) + B \operatorname{ch}(\beta x) \operatorname{sh}(\gamma t)\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A \operatorname{ch}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{sh}(\mu t)$, $g_2(x) = B \operatorname{ch}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{sh}(\gamma t)$.

100. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{sh}(\lambda x) \operatorname{ch}(\mu t) + \operatorname{sh}(\beta x) \operatorname{ch}(\gamma t)\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \operatorname{sh}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{ch}(\mu t)$, $g_2(x) = \operatorname{sh}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{ch}(\gamma t)$.

101. $\displaystyle\int_a^x \big[\operatorname{ch}(\lambda x)\operatorname{ch}(\mu t) + \operatorname{sh}(\beta x)\operatorname{sh}(\gamma t)\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{ch}(\mu t)$, $g_2(x) = \operatorname{sh}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{sh}(\gamma t)$.

102. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{ch}^\beta(\lambda x) + B\operatorname{sh}^\gamma(\mu t)\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{ch}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{sh}^\gamma(\mu t)$.

103. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{sh}^\beta(\lambda x) + B\operatorname{ch}^\gamma(\mu t)\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{sh}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{ch}^\gamma(\mu t)$.

104. $\displaystyle\int_a^x \big(Ax^\lambda \operatorname{ch}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{sh}^\gamma x\big)\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{ch}^\mu t$, $g_2(x) = B\operatorname{sh}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

105. $\displaystyle\int_a^x \big\{(x-t)\operatorname{sh}[\lambda(x-t)] - \lambda(x-t)^2 \operatorname{ch}[\lambda(x-t)]\big\}\,y(t)\,dt = f(x).$

Решение:
$$y(x) = \int_a^x g(t)\,dt,$$
где
$$g(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\,\frac{1}{64\lambda^5}\left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2\right)^6 \int_a^t (t-\tau)^{\frac{5}{2}}\, I_{\frac{5}{2}}[\lambda(t-\tau)]\,f(\tau)\,d\tau.$$

106. $\displaystyle\int_a^x \left\{\frac{\operatorname{sh}[\lambda(x-t)]}{x-t} - \lambda\operatorname{ch}[\lambda(x-t)]\right\} y(t)\,dt = f(x).$

Решение:
$$y(x) = \frac{1}{2\lambda^4}\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)^3 \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]f(t)\,dt.$$

107. $\displaystyle\int_a^x \big[\operatorname{sh}\big(\lambda\sqrt{x-t}\,\big) - \lambda\sqrt{x-t}\operatorname{ch}\big(\lambda\sqrt{x-t}\,\big)\big]\,y(t)\,dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение:
$$y(x) = -\frac{4}{\pi\lambda^3}\,\frac{d^3}{dx^3}\int_a^x \frac{\cos\big(\lambda\sqrt{x-t}\,\big)}{\sqrt{x-t}}\,f(t)\,dt.$$

108. $\displaystyle\int_a^x \big(Ax^\lambda \operatorname{sh}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{ch}^\gamma x\big)\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{sh}^\mu t$, $g_2(x) = B\operatorname{ch}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

109. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{th}(\lambda x) + B\operatorname{cth}(\mu t) + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{th}(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{cth}(\mu t) + C$.

110. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{th}^2(\lambda x) + B\operatorname{cth}^2(\mu t)\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{th}^2(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{cth}^2(\mu t)$.

111. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{th}(\lambda x)\operatorname{cth}(\mu t)+\operatorname{th}(\beta x)\operatorname{cth}(\gamma t)\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=\operatorname{th}(\lambda x)$, $h_1(t)=\operatorname{cth}(\mu t)$, $g_2(x)=\operatorname{th}(\beta x)$, $h_2(t)=\operatorname{cth}(\gamma t)$.

112. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{cth}(\lambda x)\operatorname{th}(\mu t)+\operatorname{cth}(\beta x)\operatorname{th}(\gamma t)\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=\operatorname{cth}(\lambda x)$, $h_1(t)=\operatorname{th}(\mu t)$, $g_2(x)=\operatorname{cth}(\beta x)$, $h_2(t)=\operatorname{th}(\gamma t)$.

113. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{th}(\lambda x)\operatorname{th}(\mu t)+\operatorname{cth}(\beta x)\operatorname{cth}(\gamma t)\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=\operatorname{th}(\lambda x)$, $h_1(t)=\operatorname{th}(\mu t)$, $g_2(x)=\operatorname{cth}(\beta x)$, $h_2(t)=\operatorname{cth}(\gamma t)$.

114. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{th}^\beta(\lambda x)+B\operatorname{cth}^\gamma(\mu t)\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x)=A\operatorname{th}^\beta(\lambda x)$, $h(t)=B\operatorname{cth}^\gamma(\mu t)$.

115. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{cth}^\beta(\lambda x)+B\operatorname{th}^\gamma(\mu t)\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x)=A\operatorname{cth}^\beta(\lambda x)$, $h(t)=B\operatorname{th}^\gamma(\mu t)$.

116. $\displaystyle\int_a^x \bigl(Ax^\lambda\operatorname{th}^\mu t+Bt^\beta\operatorname{cth}^\gamma x\bigr)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=Ax^\lambda$, $h_1(t)=\operatorname{th}^\mu t$, $g_2(x)=B\operatorname{cth}^\gamma x$, $h_2(t)=t^\beta$.

117. $\displaystyle\int_a^x \bigl(Ax^\lambda\operatorname{cth}^\mu t+Bt^\beta\operatorname{th}^\gamma x\bigr)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=Ax^\lambda$, $h_1(t)=\operatorname{cth}^\mu t$, $g_2(x)=B\operatorname{th}^\gamma x$, $h_2(t)=t^\beta$.

1.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции

1.4-1. Ядра уравнений содержат только логарифмические функции

1. $\displaystyle\int_a^x (\ln x-\ln t)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x)=\ln x$.
Решение: $y(x)=xf''_{xx}(x)+f'_x(x)$.

2. $\displaystyle\int_0^x \ln(x-t)y(t)\,dt=f(x).$

Решение:

$$y(x)=-\int_0^x f''_{tt}(t)\,dt\int_0^\infty \frac{(x-t)^z e^{-\mathcal{C}z}}{\Gamma(z+1)}\,dz-f'_x(0)\int_0^\infty \frac{x^z e^{-\mathcal{C}z}}{\Gamma(z+1)}\,dz,$$

где $\mathcal{C} = \lim\limits_{k\to\infty}\Bigl(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{k+1}-\ln k\Bigr) = 0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

⦿ *Литература*: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 62), А. Г. Бутковский (1979, стр. 190).

3. $\displaystyle\int_a^x [\ln(x-t)+A]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = -\frac{d}{dx}\int_a^x \nu_A(x-t)f(t)\,dt, \qquad \nu_A(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{x^z e^{(A-\mathcal{C})z}}{\Gamma(z+1)}\,dz,$$

где $\mathcal{C} = 0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

При $a=0$ решение можно записать в виде

$$y(x) = -\int_0^x f''_{tt}(t)\,dt\int_0^\infty \frac{(x-t)^z e^{(A-\mathcal{C})z}}{\Gamma(z+1)}\,dz - f'_x(0)\int_0^\infty \frac{x^z e^{(A-\mathcal{C})z}}{\Gamma(z+1)}\,dz.$$

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 483).

4. $\displaystyle\int_a^x (A\ln x + B\ln t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \ln x$. При $B=-A$ см. уравнение 1.4.1.

Решение:

$$y(x) = \frac{\operatorname{sign}(\ln x)}{A+B}\,\frac{d}{dx}\left\{\bigl|\ln x\bigr|^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x \bigl|\ln t\bigr|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

5. $\displaystyle\int_a^x (A\ln x + B\ln t + C)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.5 при $g(x)=x$.

6. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\ln^2(\lambda x) - \ln^2(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение: $y(x) = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{xf'_x(x)}{2\ln(\lambda x)}\right].$

7. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\ln^2(\lambda x) + B\ln^2(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

При $B=-A$ см. уравнение 1.4.6. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \ln^2(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\,\frac{d}{dx}\left\{\bigl|\ln(\lambda x)\bigr|^{-\frac{2A}{A+B}}\int_a^x \bigl|\ln(\lambda t)\bigr|^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

8. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\ln^2(\lambda x) + B\ln^2(\mu t) + C\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\ln^2(\lambda x)$, $h(t) = B\ln^2(\mu t) + C$.

9. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\ln(x/t)\bigr]^n y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям: $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f_x^{(n)}(a) = 0$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{n!\,x}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x)$.

10. $\displaystyle\int_a^x \bigl(\ln^2 x - \ln^2 t\bigr)^n y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям: $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f_x^{(n)}(a) = 0$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{\ln x}{2^n n!\,x}\left(\frac{x}{\ln x}\frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x)$.

11. $\displaystyle\int_a^x \ln\left(\frac{x+b}{t+b}\right) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \ln(x+b)$.
Решение: $y(x) = (x+b)f''_{xx}(x) + f'_x(x)$.

12. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{\ln(x/t)}\,y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi x}\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{t\sqrt{\ln(x/t)}}.$$

13. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{\ln(x/t)}} = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{t\sqrt{\ln(x/t)}}.$$

14. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\ln^\mu(\lambda x) - \ln^\mu(\lambda t)\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \ln^\mu(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\bigl[x\ln^{1-\mu}(\lambda x) f'_x(x)\bigr]$.

15. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\ln^\beta(\lambda x) + B\ln^\gamma(\mu t) + C\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\ln^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\ln^\gamma(\mu t) + C$.

16. $\displaystyle\int_a^x [\ln(x/t)]^\lambda y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{k}{x}\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{t[\ln(x/t)]^\lambda}, \qquad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

17. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{[\ln(x/t)]^\lambda} = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Частный случай уравнения 1.9.42 при $g(x) = \ln x$, $h(x) \equiv 1$.
Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{t[\ln(x/t)]^{1-\lambda}}.$$

1.4-2. Ядра содержат степенные и логарифмические функции

18. $\displaystyle\int_a^x (x-t)\big[\ln(x-t)+A\big]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = -\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x \nu_A(x-t)f(t)\,dt, \qquad \nu_A(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{x^z e^{(A-\mathcal{C})z}}{\Gamma(z+1)}\,dz,$$

где $\mathcal{C} = 0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 483).

19. $\displaystyle\int_a^x \frac{\ln(x-t)+A}{(x-t)^\lambda}y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = -\frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{F(t)\,dt}{(x-t)^{1-\lambda}}, \quad F(x) = \int_a^x \nu_h(x-t)f(t)\,dt,$$

$$\nu_h(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{x^z e^{hz}}{\Gamma(z+1)}\,dz, \quad h = A + \psi(1-\lambda),$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $\psi(z) = \big[\Gamma(z)\big]'_z$ — логарифмическая производная гамма-функции.

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 483).

20. $\displaystyle\int_a^x (t^\beta \ln^\lambda x - x^\beta \ln^\lambda t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.11 при $g(x) = \ln^\lambda x$, $h(t) = t^\beta$.

21. $\displaystyle\int_a^x (At^\beta \ln^\lambda x + Bx^\mu \ln^\gamma t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A\ln^\lambda x$, $h_1(t) = t^\beta$, $g_2(x) = Bx^\mu$, $h_2(t) = \ln^\gamma t$.

22. $\displaystyle\int_a^x \ln\left(\frac{x^\mu + b}{ct^\lambda + s}\right)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = \ln(x^\mu + b)$, $h(t) = -\ln(ct^\lambda + s)$.

1.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции

1.5-1. Ядра уравнений содержат косинус

1. $\displaystyle\int_a^x \cos[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $\displaystyle y(x) = f'_x(x) + \lambda^2\int_a^x f(x)\,dx.$

2. $\displaystyle\int_a^x \{\cos[\lambda(x-t)]-1\}y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a)=f'_x(a)=f''_{xx}(x)=0.$

Решение: $y(x) = -\dfrac{1}{\lambda^2} f'''_{xxx}(x) - f'_x(x)$.

3. $\displaystyle\int_a^x \{\cos[\lambda(x-t)]+b\}y(t)\,dt = f(x).$

При $b=0$ см. уравнение 1.5.1. При $b=-1$ см. уравнение 1.5.2. При $\lambda=0$ см. уравнение 1.1.1. Дифференцируя уравнение по x, приходим к уравнению вида 2.5.16:

$$y(x) - \frac{\lambda}{b+1}\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = \frac{f'_x(x)}{b+1}.$$

1°. Решение при $b(b+1)>0$:

$$y(x) = \frac{f'_x(x)}{b+1} + \frac{\lambda^2}{k(b+1)^2}\int_a^x \sin[k(x-t)]f'_t(t)\,dt, \qquad \text{где}\quad k=\lambda\sqrt{\frac{b}{b+1}}.$$

2°. Решение при $b(b+1)<0$:

$$y(x) = \frac{f'_x(x)}{b+1} + \frac{\lambda^2}{k(b+1)^2}\int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)]f'_t(t)\,dt, \qquad \text{где}\quad k=\lambda\sqrt{\frac{-b}{b+1}}.$$

4. $\displaystyle\int_a^x \cos(\lambda x+\beta t)y(t)\,dt = f(x).$

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$\cos[(\lambda+\beta)x]y(x) - \lambda\int_a^x \sin(\lambda x+\beta t)y(t)\,dt = f'_x(x), \tag{1}$$

$$\bigl\{\cos[(\lambda+\beta)x]y(x)\bigr\}'_x - \lambda\sin[(\lambda+\beta)x]y(x) - \lambda^2\int_a^x \cos(\lambda x+\beta t)y(t)\,dt = f''_{xx}(x) \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$w'_x - \lambda\operatorname{tg}[(\lambda+\beta)x]w = f''_{xx}(x)+\lambda^2 f(x), \qquad w=\cos[(\lambda+\beta)x]y(x). \tag{3}$$

Полагая $x=a$ в равенстве (1), имеем начальное условие $w(a)=f'_x(a)$. Решив уравнение (3) с этим условием, после некоторых преобразований получим решение исходного интегрального уравнения в виде

$$\begin{aligned} y(x) = {}&\frac{1}{\cos[(\lambda+\beta)x]}f'_x(x) + \frac{\lambda\sin[(\lambda+\beta)x]}{\cos^2[(\lambda+\beta)x]}f(x) - \\ &- \frac{\lambda\beta}{\cos^{k+1}[(\lambda+\beta)x]}\int_a^x f(t)\cos^{k-2}[(\lambda+\beta)t]\,dt, \qquad k=\frac{\lambda}{\lambda+\beta}. \end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\cos(\lambda x)-\cos(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x)=\cos(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = -\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f'_x(x)}{\sin(\lambda x)}\right]$.

6. $\displaystyle\int_a^x \big[A\cos(\lambda x) + B\cos(\lambda t)\big]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x)=\cos(\lambda x)$. При $B=-A$ см. уравнение 1.5.5.

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{\operatorname{sign}\cos(\lambda x)}{A+B}\,\frac{d}{dx}\left\{\big|\cos(\lambda x)\big|^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x \big|\cos(\lambda t)\big|^{-\frac{B}{A+B}} f_t'(t)\,dt\right\}.$$

7. $\displaystyle\int_a^x \big[A\cos(\lambda x) + B\cos(\mu t) + C\big]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\cos(\lambda x)$, $h(t) = B\cos(\mu t) + C$.

8. $\displaystyle\int_a^x \big\{A_1\cos[\lambda_1(x-t)] + A_2\cos[\lambda_2(x-t)]\big\}y(t)\,dt = f(x).$

Это уравнение эквивалентно уравнению вида 1.5.41:

$$\int_a^x \big\{B_1\sin[\lambda_1(x-t)] + B_2\sin[\lambda_2(x-t)]\big\}y(t)\,dt = F(x),$$

$$B_1 = \frac{A_1}{\lambda_1},\quad B_2 = \frac{A_2}{\lambda_2},\quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

(Дифференцируя это уравнение, получим исходное интегральное уравнение.)

9. $\displaystyle\int_a^x \cos^2[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Дифференцируя, приходим к уравнению вида 2.5.16:

$$y(x) - \lambda\int_a^x \sin[2\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f_x'(x).$$

Решение:

$$y(x) = f_x'(x) + \frac{2\lambda^2}{k}\int_a^x \sin[k(x-t)]f_t'(t)\,dt, \qquad \text{где}\quad k = \lambda\sqrt{2}.$$

10. $\displaystyle\int_a^x \big[\cos^2(\lambda x) - \cos^2(\lambda t)\big]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f_x'(a) = 0.$

Решение: $\displaystyle y(x) = -\frac{1}{\lambda}\,\frac{d}{dx}\left[\frac{f_x'(x)}{\sin(2\lambda x)}\right].$

11. $\displaystyle\int_a^x \big[A\cos^2(\lambda x) + B\cos^2(\lambda t)\big]y(t)\,dt = f(x).$

При $B=-A$ см. уравнение 1.5.10. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \cos^2(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\,\frac{d}{dx}\left\{\big[\cos(\lambda x)\big]^{-\frac{2A}{A+B}}\int_a^x \big[\cos(\lambda t)\big]^{-\frac{2B}{A+B}} f_t'(t)\,dt\right\}.$$

12. $\displaystyle\int_a^x \big[A\cos^2(\lambda x) + B\cos^2(\mu t) + C\big]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\cos^2(\lambda x)$, $h(t) = B\cos^2(\mu t) + C$.

13. $\displaystyle\int_a^x \cos[\lambda(x-t)]\cos[\lambda(x+t)]y(t)\,dt = f(x).$

Используя тригонометрическую формулу

$$\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) = \tfrac{1}{2}\bigl[\cos(2\alpha)+\cos(2\beta)\bigr], \quad \alpha=\lambda x, \quad \beta=\lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.5.6 при $A=B=1$:

$$\int_a^x \bigl[\cos(2\lambda x)+\cos(2\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = 2f(x).$$

Решение при $\cos(2\lambda x) > 0$:

$$y(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{\cos(2\lambda x)}}\int_a^x \frac{f_t'(t)\,dt}{\sqrt{\cos(2\lambda t)}}\right].$$

14. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\cos(\lambda x)\cos(\mu t)+B\cos(\beta x)\cos(\gamma t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=A\cos(\lambda x)$, $h_1(t)=\cos(\mu t)$, $g_2(x)=B\cos(\beta x)$, $h_2(t)=\cos(\gamma t)$.

15. $\displaystyle\int_a^x \cos^3[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Используя формулу $\cos^3\beta = \frac{1}{4}\cos 3\beta + \frac{3}{4}\cos\beta$, приходим к уравнению вида 1.5.8:

$$\int_a^x \bigl\{\tfrac{1}{4}\cos[3\lambda(x-t)] + \tfrac{3}{4}\cos[\lambda(x-t)]\bigr\}y(t)\,dt = f(x).$$

16. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\cos^3(\lambda x)-\cos^3(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a)=f_x'(a)=0.$

Решение: $\displaystyle y(x) = -\frac{1}{3\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{f_x'(x)}{\sin(\lambda x)\cos^2(\lambda x)}\right].$

17. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\cos^3(\lambda x)+B\cos^3(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

При $B=-A$ см. уравнение 1.5.16. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x)=\cos^3(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\bigl[\cos(\lambda x)\bigr]^{-\frac{3A}{A+B}}\int_a^x \bigl[\cos(\lambda t)\bigr]^{-\frac{3B}{A+B}} f_t'(t)\,dt\right\}.$$

18. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\cos^2(\lambda x)\cos(\mu t)+\cos(\beta x)\cos^2(\gamma t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=\cos^2(\lambda x)$, $h_1(t)=\cos(\mu t)$, $g_2(x)=\cos(\beta x)$, $h_2(t)=\cos^2(\gamma t)$.

19. $\displaystyle\int_a^x \cos^4[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Преобразуем ядро интегрального уравнения с помощью тригонометрической формулы $\cos^4\beta = \frac{1}{8}\cos 4\beta + \frac{1}{2}\cos 2\beta + \frac{3}{8}$, где $\beta=\lambda(x-t)$, а затем продифференцируем уравнение по x. В результате приходим к уравнению вида 2.5.18:

$$y(x) - \lambda\int_a^x \bigl\{\tfrac{1}{2}\sin[4\lambda(x-t)] + \sin[2\lambda(x-t)]\bigr\}y(t)\,dt = f_x'(x).$$

20. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\cos(\lambda x)-\cos(\lambda t)\bigr]^n y(t)\,dt = f(x), \qquad n=1,2,\dots$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям: $f(a)=f'_x(a)=\dots=f_x^{(n)}(a)=0$.

Решение: $\displaystyle y(x)=\frac{(-1)^n}{\lambda^n n!}\sin(\lambda x)\left[\frac{1}{\sin(\lambda x)}\frac{d}{dx}\right]^{n+1} f(x).$

21. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{\cos t-\cos x}\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.38 при $g(x)=1-\cos x$.

Решение:

$$y(x)=\frac{2}{\pi}\sin x\left(\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\right)^2\int_a^x \frac{\sin t\,f(t)\,dt}{\sqrt{\cos t-\cos x}}.$$

22. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{\cos t-\cos x}} = f(x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\sin t\,f(t)\,dt}{\sqrt{\cos t-\cos x}}.$$

23. $\displaystyle\int_a^x (\cos t-\cos x)^\lambda y(t)\,dt = f(x), \qquad 0<\lambda<1.$

Решение:

$$y(x)=k\sin x\left(\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\right)^2\int_a^x \frac{\sin t\,f(t)\,dt}{(\cos t-\cos x)^\lambda}, \qquad k=\frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

24. $\displaystyle\int_a^x (\cos^\mu x-\cos^\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x)=\cos^\mu x$.

Решение: $\displaystyle y(x)=-\frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\sin x\cos^{\mu-1}x}\right].$

25. $\displaystyle\int_a^x \bigl(A\cos^\mu x+B\cos^\mu t\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

При $B=-A$ см. уравнение 1.5.24. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x)=\cos^\mu x$.

Решение:

$$y(x)=\frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{|\cos x|^{-\frac{A\mu}{A+B}}\int_a^x |\cos t|^{-\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

26. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{(\cos t-\cos x)^\lambda} = f(x), \qquad 0<\lambda<1.$

Решение:

$$y(x)=\frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\sin t\,f(t)\,dt}{(\cos t-\cos x)^{1-\lambda}}.$$

27. $\displaystyle \int_a^x (x-t)\cos[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Дифференцируя уравнение дважды, имеем

$$y(x) - 2\lambda \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]y(t)\,dt - \lambda^2 \int_a^x (x-t)\cos[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f''_{xx}(x).$$

Исключая отсюда третье слагаемое в левой части с помощью исходного уравнения, приходим к уравнению вида 2.5.16:

$$y(x) - 2\lambda \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x).$$

28. $\displaystyle \int_a^x \frac{\cos\left(\lambda\sqrt{x-t}\right)}{\sqrt{x-t}}\, y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\operatorname{ch}\left(\lambda\sqrt{x-t}\right)}{\sqrt{x-t}} f(t)\,dt.$$

29. $\displaystyle \int_0^x \frac{\cos\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}}\, y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x t\,\frac{\operatorname{ch}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}} f(t)\,dt.$$

30. $\displaystyle \int_x^\infty \frac{\cos\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}}\, y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_x^\infty t\,\frac{\operatorname{ch}\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}} f(t)\,dt.$$

31. $\displaystyle \int_a^x \left[Ax^\beta + B\cos^\gamma(\lambda t) + C\right]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B\cos^\gamma(\lambda t) + C$.

32. $\displaystyle \int_a^x \left[A\cos^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C\right]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\cos^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

33. $\displaystyle \int_a^x \left(Ax^\lambda \cos^\mu t + Bt^\beta \cos^\gamma x\right)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \cos^\mu t$, $g_2(x) = B\cos^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.5-2. Ядра уравнений содержат синус

34. $\displaystyle \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{\lambda} f''_{xx}(x) + \lambda f(x).$

35. $\displaystyle\int_a^x \bigl\{\sin[\lambda(x-t)]+b\bigr\}y(t)\,dt=f(x).$

Дифференцируя уравнение по x, приходим к уравнению вида 2.5.3:

$$y(x)+\frac{\lambda}{b}\int_a^x \cos[\lambda(x-t)]y(t)\,dt=\frac{1}{b}f'_x(x).$$

36. $\displaystyle\int_a^x \sin(\lambda x+\beta t)y(t)\,dt=f(x).$

При $\beta=-\lambda$ см. уравнение 1.5.34. Пусть $\beta\neq-\lambda$.

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$\sin[(\lambda+\beta)x]y(x)+\lambda\int_a^x \cos(\lambda x+\beta t)y(t)\,dt=f'_x(x), \tag{1}$$

$$\bigl\{\sin[(\lambda+\beta)x]y(x)\bigr\}'_x+\lambda\cos[(\lambda+\beta)x]y(x)-\lambda^2\int_a^x \sin(\lambda x+\beta t)y(t)\,dt=f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$w'_x+\lambda\operatorname{ctg}[(\lambda+\beta)x]w=f''_{xx}(x)+\lambda^2 f(x),\qquad w=\sin[(\lambda+\beta)x]y(x). \tag{3}$$

Полагая $x=a$ в равенстве (1), имеем начальное условие $w(a)=f'_x(a)$. Решив уравнение (3) с этим условием, после некоторых преобразований получим решение исходного интегрального уравнения в виде

$$y(x)=\frac{1}{\sin[(\lambda+\beta)x]}f'_x(x)-\frac{\lambda\cos[(\lambda+\beta)x]}{\sin^2[(\lambda+\beta)x]}f(x)-$$
$$-\frac{\lambda\beta}{\sin^{k+1}[(\lambda+\beta)x]}\int_a^x f(t)\sin^{k-2}[(\lambda+\beta)t]\,dt,\qquad k=\frac{\lambda}{\lambda+\beta}.$$

37. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\sin(\lambda x)-\sin(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x)=\sin(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x)=\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\cos(\lambda x)}\right].$

38. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\sin(\lambda x)+B\sin(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x)=\sin(\lambda x)$. При $B=-A$ см. уравнение 1.5.37.

Решение при $B\neq-A$:

$$y(x)=\frac{\operatorname{sign}\sin(\lambda x)}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\bigl|\sin(\lambda x)\bigr|^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x \bigl|\sin(\lambda t)\bigr|^{-\frac{B}{A+B}}f'_t(t)\,dt\right\}.$$

39. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\sin(\lambda x)+B\sin(\mu t)+C\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x)=A\sin(\lambda x)$, $h(t)=B\sin(\mu t)+C$.

40. $\displaystyle\int_a^x \bigl\{\mu\sin[\lambda(x-t)]-\lambda\sin[\mu(x-t)]\bigr\}y(t)\,dt=f(x).$

Считается, что выполнены условия $f(a)=f'_x(a)=f''_{xx}(a)=f'''_{xxx}(a)=0$.

Решение:

$$y(x)=\frac{f''''_{xxxx}+(\lambda^2+\mu^2)f''_{xx}+\lambda^2\mu^2 f}{\lambda\mu^3-\lambda^3\mu},\qquad f=f(x).$$

41. $\displaystyle\int_a^x \big\{A_1 \sin[\lambda_1(x-t)] + A_2 \sin[\lambda_2(x-t)]\big\} y(t)\,dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Это уравнение решается таким же методом, что и уравнение 1.3.41, т. е. путем сведения к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Обозначим

$$\Delta = -\lambda_1\lambda_2\,\frac{A_1\lambda_2 + A_2\lambda_1}{A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2}.$$

1°. Решение при $\Delta > 0$:

$$(A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2)y(x) = f''_{xx}(x) + Bf(x) + C\int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)]f(t)\,dt,$$

$$k = \sqrt{\Delta}, \quad B = \Delta + \lambda_1^2 + \lambda_2^2, \quad C = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\big[\Delta^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Delta + \lambda_1^2\lambda_2^2\big].$$

2°. Решение при $\Delta < 0$:

$$(A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2)y(x) = f''_{xx}(x) + Bf(x) + C\int_a^x \sin[k(x-t)]f(t)\,dt,$$

$$k = \sqrt{-\Delta}, \quad B = \Delta + \lambda_1^2 + \lambda_2^2, \quad C = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\big[\Delta^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Delta + \lambda_1^2\lambda_2^2\big].$$

3°. Решение при $\Delta = 0$:

$$(A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2)y(x) = f''_{xx}(x) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)f(x) + \lambda_1^2\lambda_2^2\int_a^x (x-t)f(t)\,dt.$$

4°. Решение при $\Delta = \infty$:

$$y(x) = -\frac{f''''_{xxxx} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)f''_{xx} + \lambda_1^2\lambda_2^2 f}{A_1\lambda_1^3 + A_2\lambda_2^3}, \qquad f = f(x).$$

В последнем случае выполняется равенство $A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0$ и правая часть интегрального уравнения должна удовлетворять следующим условиям: $f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0$.

Замечание. Решение можно получить из решения уравнения 1.3.41, заменив в нем параметры по правилу $\lambda_k \to i\lambda_k$, $A_k \to -iA_k$, $i^2 = -1$ $(k = 1, 2)$.

42. $\displaystyle\int_a^x \big\{A\sin[\lambda(x-t)] + B\sin[\mu(x-t)] + C\sin[\beta(x-t)]\big\} y(t)\,dt = f(x).$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = 0$. Продифференцируем интегральное уравнение два раза. В результате имеем

$$(A\lambda + B\mu + C\beta)y(x) - \int_a^x \big\{A\lambda^2\sin[\lambda(x-t)] + B\mu^2\sin[\mu(x-t)]\big\}y(t)\,dt -$$
$$- C\beta^2\int_a^x \sin[\beta(x-t)]y(t)\,dt = f''_{xx}(x).$$

Исключая отсюда последний интеграл с помощью исходного уравнения, приходим к уравнению вида 2.5.18:

$$(A\lambda + B\mu + C\beta)y(x) + \int_a^x \big\{A(\beta^2 - \lambda^2)\sin[\lambda(x-t)] +$$
$$+ B(\beta^2 - \mu^2)\sin[\mu(x-t)]\big\}y(t)\,dt = f''_{xx}(x) + \beta^2 f(x).$$

В частном случае $A\lambda + B\mu + C\beta = 0$ это уравнение вида 1.5.41.

43. $\displaystyle\int_a^x \sin^2[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a)=f'_x(a)=f''_{xx}(a)=0.$

Дифференцируя, приходим к уравнению вида 1.5.34:

$$\int_a^x \sin[2\lambda(x-t)]y(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}f'_x(x).$$

Решение: $y(x)=\frac{1}{2}\lambda^{-2}f'''_{xxx}(x)+2f'_x(x)$.

44. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\sin^2(\lambda x)-\sin^2(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a)=f'_x(a)=0.$

Решение: $\displaystyle y(x)=\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\sin(2\lambda x)}\right]$.

45. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\sin^2(\lambda x)+B\sin^2(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

При $B=-A$ см. уравнение 1.5.44. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x)=\sin^2(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x)=\frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\bigl|\sin(\lambda x)\bigr|^{-\frac{2A}{A+B}}\int_a^x \bigl|\sin(\lambda t)\bigr|^{-\frac{2B}{A+B}}f'_t(t)\,dt\right\}.$$

46. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\sin^2(\lambda x)+B\sin^2(\mu t)+C\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x)=A\sin^2(\lambda x)$, $h(t)=B\sin^2(\mu t)+C$.

47. $\displaystyle\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]\sin[\lambda(x+t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a)=f'_x(a)=0.$

Используя тригонометрическую формулу

$$\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\tfrac{1}{2}\bigl[\cos(2\beta)-\cos(2\alpha)\bigr], \quad \alpha=\lambda x, \quad \beta=\lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.5.5:

$$\int_a^x \bigl[\cos(2\lambda x)-\cos(2\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = -2f(x).$$

Решение: $\displaystyle y(x)=\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\sin(2\lambda x)}\right]$.

48. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\sin(\lambda x)\sin(\mu t)+\sin(\beta x)\sin(\gamma t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=\sin(\lambda x)$, $h_1(t)=\sin(\mu t)$, $g_2(x)=\sin(\beta x)$, $h_2(t)=\sin(\gamma t)$.

49. $\displaystyle\int_a^x \sin^3[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Считается, что выполнены условия $f(a)=f'_x(a)=f''_{xx}(a)=f'''_{xxx}(a)=0$.

Используя формулу $\sin^3\beta=-\frac{1}{4}\sin 3\beta+\frac{3}{4}\sin\beta$, приходим к уравнению вида 1.5.41:

$$\int_a^x \bigl\{-\tfrac{1}{4}\sin[3\lambda(x-t)]+\tfrac{3}{4}\sin[\lambda(x-t)]\bigr\}y(t)\,dt = f(x).$$

50. $\displaystyle\int_a^x \big[\sin^3(\lambda x) - \sin^3(\lambda t)\big]\, y(t)\, dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \sin^3(\lambda x)$.

51. $\displaystyle\int_a^x \big[A\sin^3(\lambda x) + B\sin^3(\lambda t)\big]\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \sin^3(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{\operatorname{sign}\sin(\lambda x)}{A+B}\,\frac{d}{dx}\left\{\big|\sin(\lambda x)\big|^{-\frac{3A}{A+B}} \int_a^x \big|\sin(\lambda t)\big|^{-\frac{3B}{A+B}} f'_t(t)\, dt\right\}.$$

52. $\displaystyle\int_a^x \big[\sin^2(\lambda x)\sin(\mu t) + \sin(\beta x)\sin^2(\gamma t)\big]\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \sin^2(\lambda x)$, $h_1(t) = \sin(\mu t)$, $g_2(x) = \sin(\beta x)$, $h_2(t) = \sin^2(\gamma t)$.

53. $\displaystyle\int_a^x \sin^4[\lambda(x-t)]\, y(t)\, dt = f(x).$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f''''_{xxxx}(a) = 0$.

Преобразуем ядро интегрального уравнения с помощью тригонометрической формулы $\sin^4\beta = \frac{1}{8}\cos 4\beta - \frac{1}{2}\cos 2\beta + \frac{3}{8}$, где $\beta = \lambda(x-t)$, а затем продифференцируем уравнение по x. В результате приходим к уравнению вида 1.5.41:

$$\lambda \int_a^x \big\{-\tfrac{1}{2}\sin[4\lambda(x-t)] + \sin[2\lambda(x-t)]\big\}\, y(t)\, dt = f'_x(x).$$

54. $\displaystyle\int_a^x \sin^n[\lambda(x-t)]\, y(t)\, dt = f(x), \qquad n = 2, 3, \dots$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f^{(n)}_x(a) = 0$.

Продифференцируем дважды уравнение по x. Преобразуем ядро полученного интегрального уравнения с помощью равенства $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$, где $\beta = \lambda(x-t)$. В результате имеем

$$-\lambda^2 n^2 \int_a^x \sin^n[\lambda(x-t)]\, y(t)\, dt + \lambda^2 n(n-1) \int_a^x \sin^{n-2}[\lambda(x-t)]\, y(t)\, dt = f''_{xx}(x).$$

Исключая отсюда первое слагаемое в левой части с помощью исходного уравнения, получим

$$\int_a^x \sin^{n-2}[\lambda(x-t)]\, y(t)\, dt = \frac{1}{\lambda^2 n(n-1)}\big[f''_{xx}(x) + \lambda^2 n^2 f(x)\big].$$

Это уравнение такого же вида, что и исходное; при этом степень, характеризующая ядро преобразованного уравнения, уменьшилась на две единицы.

Используя указанный прием достаточное число раз, в итоге можно прийти к простейшим интегральным уравнениям вида 1.1.1 (при четном n) или 1.5.34 (при нечетном n).

55. $\displaystyle\int_a^x \sin\big(\lambda\sqrt{x-t}\,\big)\, y(t)\, dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi\lambda}\,\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x \frac{\operatorname{ch}\big(\lambda\sqrt{x-t}\,\big)}{\sqrt{x-t}}\, f(t)\, dt.$$

56. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{\sin x - \sin t}\, y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\cos x\left(\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \frac{\cos t\, f(t)\,dt}{\sqrt{\sin x - \sin t}}.$$

57. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{\sin x - \sin t}} = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\cos t\, f(t)\,dt}{\sqrt{\sin x - \sin t}}.$$

58. $\displaystyle\int_a^x (\sin x - \sin t)^\lambda y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = k\cos x\left(\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \frac{\cos t\, f(t)\,dt}{(\sin x - \sin t)^\lambda}, \qquad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

59. $\displaystyle\int_a^x (\sin^\mu x - \sin^\mu t) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \sin^\mu x$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\cos x \sin^{\mu-1} x}\right].$

60. $\displaystyle\int_a^x \bigl\{A|\sin(\lambda x)|^\mu + B|\sin(\lambda t)|^\mu\bigr\} y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = |\sin(\lambda x)|^\mu$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\bigl|\sin(\lambda x)\bigr|^{-\frac{A\mu}{A+B}} \int_a^x \bigl|\sin(\lambda t)\bigr|^{-\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

61. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{[\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)]^\mu} = f(x), \qquad 0 < \mu < 1.$

Частный случай уравнения 1.9.42 при $g(x) = \sin(\lambda x)$, $h(x) \equiv 1$.

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda\sin(\pi\mu)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\cos(\lambda t) f(t)\,dt}{[\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)]^{1-\mu}}.$$

62. $\displaystyle\int_a^x (x-t)\sin[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = 0.$

Дифференцируя дважды, получим

$$2\lambda\int_a^x \cos[\lambda(x-t)] y(t)\,dt - \lambda^2\int_a^x (x-t)\sin[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f''_{xx}(x).$$

Исключая второй интеграл в левой части этого выражения с помощью исходного уравнения, приходим к уравнению вида 1.5.1:

$$\int_a^x \cos[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = \frac{1}{2\lambda}\bigl[f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x)\bigr].$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} f'''_{xxx}(x) + \lambda f'_x(x) + \frac{1}{2}\lambda^3 \int_a^x f(t)\,dt.$$

63. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ax^\beta + B\sin^\gamma(\lambda t) + C\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B\sin^\gamma(\lambda t) + C$.

64. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\sin^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\sin^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

65. $\displaystyle\int_a^x \bigl(Ax^\lambda \sin^\mu t + Bt^\beta \sin^\gamma x\bigr) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \sin^\mu t$, $g_2(x) = B\sin^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.5-3. Ядра уравнений содержат тангенс

66. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{tg}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{d}{dx}\bigl[\cos^2(\lambda x) f'_x(x)\bigr].$

67. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{tg}(\lambda x) + B\operatorname{tg}(\lambda t)\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.66. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{tg}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{A+B}\dfrac{d}{dx}\left\{\bigl[\operatorname{tg}(\lambda x)\bigr]^{-\frac{A}{A+B}} \displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{tg}(\lambda t)\bigr]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$

68. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{tg}(\lambda x) + B\operatorname{tg}(\mu t) + C\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{tg}(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{tg}(\mu t) + C$.

69. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{tg}^2(\lambda x) - \operatorname{tg}^2(\lambda t)\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{tg}^2(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\cos^3(\lambda x) f'_x(x)}{2\lambda\sin(\lambda x)}\right].$

70. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{tg}^2(\lambda x) + B\operatorname{tg}^2(\lambda t)\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.69. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{tg}^2(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{A+B}\dfrac{d}{dx}\left\{\bigl|\operatorname{tg}(\lambda x)\bigr|^{-\frac{2A}{A+B}} \displaystyle\int_a^x \bigl|\operatorname{tg}(\lambda t)\bigr|^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$

71. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{tg}^2(\lambda x) + B\operatorname{tg}^2(\mu t) + C\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{tg}^2(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{tg}^2(\mu t) + C$.

72. $\displaystyle\int_a^x \big[\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)\big]^n y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям: $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f^{(n)}_x(a) = 0$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\lambda^n n! \cos^2(\lambda x)}\left[\cos^2(\lambda x)\frac{d}{dx}\right]^{n+1} f(x).$

73. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} t}\, y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi\cos^2 x}\left(\cos^2 x\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\cos^2 t\sqrt{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} t}}.$$

74. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} t}} = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\cos^2 t\sqrt{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} t}}.$$

75. $\displaystyle\int_a^x (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} t)^\lambda y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda\cos^2 x}\left(\cos^2 x\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\cos^2 t(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} t)^\lambda}.$$

76. $\displaystyle\int_a^x (\operatorname{tg}^\mu x - \operatorname{tg}^\mu t) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{tg}^\mu x$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left[\frac{\cos^{\mu+1} x f'_x(x)}{\sin^{\mu-1} x}\right].$

77. $\displaystyle\int_a^x \big(A\operatorname{tg}^\mu x + B\operatorname{tg}^\mu t\big) y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.76. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{tg}^\mu x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\big[\operatorname{tg}(\lambda x)\big]^{-\frac{A\mu}{A+B}} \int_a^x \big[\operatorname{tg}(\lambda t)\big]^{-\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

78. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{[\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)]^\mu} = f(x), \qquad 0 < \mu < 1.$

Частный случай уравнения 1.9.42 при $g(x) = \operatorname{tg}(\lambda x)$, $h(x) \equiv 1$.

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda\sin(\pi\mu)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\cos^2(\lambda t)[\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)]^{1-\mu}}.$$

79. $\displaystyle\int_a^x \big[Ax^\beta + B\operatorname{tg}^\gamma(\lambda t) + C\big] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B\operatorname{tg}^\gamma(\lambda t) + C$.

80. $\displaystyle\int_a^x \big[A\,\mathrm{tg}^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C\big]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\,\mathrm{tg}^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

81. $\displaystyle\int_a^x \big(Ax^\lambda\,\mathrm{tg}^\mu t + Bt^\beta\,\mathrm{tg}^\gamma x\big)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \mathrm{tg}^\mu t$, $g_2(x) = B\,\mathrm{tg}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.5-4. Ядра уравнений содержат котангенс

82. $\displaystyle\int_a^x \big[\mathrm{ctg}(\lambda x) - \mathrm{ctg}(\lambda t)\big]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \mathrm{ctg}(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = -\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}\big[\sin^2(\lambda x) f'_x(x)\big].$

83. $\displaystyle\int_a^x \big[A\,\mathrm{ctg}(\lambda x) + B\,\mathrm{ctg}(\lambda t)\big]y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.82. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \mathrm{ctg}(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\big[\mathrm{tg}(\lambda x)\big]^{\frac{A}{A+B}}\int_a^x \big[\mathrm{tg}(\lambda t)\big]^{\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$

84. $\displaystyle\int_a^x \big[A\,\mathrm{ctg}(\lambda x) + B\,\mathrm{ctg}(\mu t) + C\big]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\,\mathrm{ctg}(\lambda x)$, $h(t) = B\,\mathrm{ctg}(\mu t) + C$.

85. $\displaystyle\int_a^x \big[\mathrm{ctg}^2(\lambda x) - \mathrm{ctg}^2(\lambda t)\big]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \mathrm{ctg}^2(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = -\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin^3(\lambda x) f'_x(x)}{2\lambda\cos(\lambda x)}\right].$

86. $\displaystyle\int_a^x \big[A\,\mathrm{ctg}^2(\lambda x) + B\,\mathrm{ctg}^2(\lambda t)\big]y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.85. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \mathrm{ctg}^2(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\big|\mathrm{tg}(\lambda x)\big|^{\frac{2A}{A+B}}\int_a^x \big|\mathrm{tg}(\lambda t)\big|^{\frac{2B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$

87. $\displaystyle\int_a^x \big[A\,\mathrm{ctg}^2(\lambda x) + B\,\mathrm{ctg}^2(\mu t) + C\big]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\,\mathrm{ctg}^2(\lambda x)$, $h(t) = B\,\mathrm{ctg}^2(\mu t) + C$.

88. $\displaystyle\int_a^x \big[\mathrm{ctg}(\lambda x) - \mathrm{ctg}(\lambda t)\big]^n y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям: $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f^{(n)}_x(a) = 0$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{(-1)^n}{\lambda^n n!\sin^2(\lambda x)}\left[\sin^2(\lambda x)\frac{d}{dx}\right]^{n+1} f(x).$

89. $\displaystyle\int_a^x (\operatorname{ctg}^\mu x - \operatorname{ctg}^\mu t) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{ctg}^\mu x$.

Решение: $\displaystyle y(x) = -\frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin^{\mu+1} x f'_x(x)}{\cos^{\mu-1} x}\right].$

90. $\displaystyle\int_a^x \bigl(A \operatorname{ctg}^\mu x + B \operatorname{ctg}^\mu t\bigr) y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.89. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{ctg}^\mu x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{|\operatorname{tg} x|^{\frac{A\mu}{A+B}} \int_a^x |\operatorname{tg} t|^{\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

91. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ax^\beta + B \operatorname{ctg}^\gamma(\lambda t) + C\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B\operatorname{ctg}^\gamma(\lambda t) + C$.

92. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A \operatorname{ctg}^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{ctg}^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

93. $\displaystyle\int_a^x \bigl(Ax^\lambda \operatorname{ctg}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{ctg}^\gamma x\bigr) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{ctg}^\mu t$, $g_2(x) = B\operatorname{ctg}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.5-5. Ядра уравнений содержат комбинации тригонометрических функций

94. $\displaystyle\int_a^x \bigl\{\cos[\lambda(x-t)] + A\sin[\mu(x-t)]\bigr\} y(t)\,dt = f(x).$

Продифференцируем уравнение по x, а затем исключим интеграл с косинусом. В результате приходим к уравнению вида 2.3.16:

$$y(x) - (\lambda + A^2\mu)\int_a^x \sin[\mu(x-t)]\, y(t)\,dt = f'_x(x) - A\mu f(x).$$

95. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\cos(\lambda x) + B\sin(\mu t) + C\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\cos(\lambda x)$, $h(t) = B\sin(\mu t) + C$.

96. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\sin(\lambda x) + B\cos(\mu t) + C\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\sin(\lambda x)$, $h(t) = B\cos(\mu t) + C$.

97. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\cos^2(\lambda x) + B\sin^2(\mu t)\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\cos^2(\lambda x)$, $h(t) = B\sin^2(\mu t)$.

98. $\displaystyle\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]\cos[\lambda(x+t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Используя тригонометрическую формулу

$$\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) = \tfrac{1}{2}\bigl[\sin(2\alpha)-\sin(2\beta)\bigr], \quad \alpha=\lambda x, \quad \beta=\lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.5.37:

$$\int_a^x \bigl[\sin(2\lambda x)-\sin(2\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = 2f(x).$$

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f'_x(x)}{\cos(2\lambda x)}\right]$.

99. $\displaystyle\int_a^x \cos[\lambda(x-t)]\sin[\lambda(x+t)]y(t)\,dt = f(x).$

Используя тригонометрическую формулу

$$\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta) = \tfrac{1}{2}\bigl[\sin(2\alpha)+\sin(2\beta)\bigr], \quad \alpha=\lambda x, \quad \beta=\lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.5.38 при $A=B=1$:

$$\int_a^x \bigl[\sin(2\lambda x)+\sin(2\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = 2f(x).$$

Решение при $\sin(2\lambda x) > 0$:

$$y(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{\sin(2\lambda x)}}\int_a^x \frac{f'_t(t)\,dt}{\sqrt{\sin(2\lambda t)}}\right].$$

100. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\cos(\lambda x)\sin(\mu t)+B\cos(\beta x)\sin(\gamma t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A\cos(\lambda x)$, $h_1(t) = \sin(\mu t)$, $g_2(x) = B\cos(\beta x)$, $h_2(t) = \sin(\gamma t)$.

101. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\sin(\lambda x)\cos(\mu t)+B\sin(\beta x)\cos(\gamma t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A\sin(\lambda x)$, $h_1(t) = \cos(\mu t)$, $g_2(x) = B\sin(\beta x)$, $h_2(t) = \cos(\gamma t)$.

102. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\cos(\lambda x)\cos(\mu t)+B\sin(\beta x)\sin(\gamma t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A\cos(\lambda x)$, $h_1(t) = \cos(\mu t)$, $g_2(x) = B\sin(\beta x)$, $h_2(t) = \sin(\gamma t)$.

103. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\cos^\beta(\lambda x)+B\sin^\gamma(\mu t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\cos^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\sin^\gamma(\mu t)$.

104. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\sin^\beta(\lambda x)+B\cos^\gamma(\mu t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\sin^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\cos^\gamma(\mu t)$.

105. $\displaystyle\int_a^x \bigl(Ax^\lambda\cos^\mu t+Bt^\beta\sin^\gamma x\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \cos^\mu t$, $g_2(x) = B\sin^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

106. $\displaystyle\int_a^x \big(Ax^\lambda \sin^\mu t + Bt^\beta \cos^\gamma x\big)\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \sin^\mu t$, $g_2(x) = B\cos^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

107. $\displaystyle\int_a^x \big\{(x-t)\sin[\lambda(x-t)] - \lambda(x-t)^2\,\cos[\lambda(x-t)]\big\}\,y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t)\,dt,$$

где

$$g(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\,\frac{1}{64\lambda^5}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\lambda^2\right)^6 \int_a^t (t-\tau)^{5/2} J_{5/2}[\lambda(t-\tau)]\,f(\tau)\,d\tau.$$

108. $\displaystyle\int_a^x \left\{\frac{\sin[\lambda(x-t)]}{x-t} - \lambda\cos[\lambda(x-t)]\right\} y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda^4}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2\right)^3 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]f(t)\,dt.$$

109. $\displaystyle\int_a^x \big[\sin\big(\lambda\sqrt{x-t}\,\big) - \lambda\sqrt{x-t}\cos\big(\lambda\sqrt{x-t}\,\big)\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Правая часть уравнения удовлетворяет условиям $f(a) = f'_x(a) = 0$.
Решение:

$$y(x) = \frac{4}{\pi\lambda^3}\,\frac{d^3}{dx^3}\int_a^x \frac{\operatorname{ch}\big(\lambda\sqrt{x-t}\,\big)}{\sqrt{x-t}}\,f(t)\,dt.$$

110. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{tg}(\lambda x) + B\operatorname{ctg}(\mu t) + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{tg}(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{ctg}(\mu t) + C$.

111. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{tg}^2(\lambda x) + B\operatorname{ctg}^2(\mu t)\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{tg}^2(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{ctg}^2(\mu t)$.

112. $\displaystyle\int_a^x \big[\operatorname{tg}(\lambda x)\operatorname{ctg}(\mu t) + \operatorname{tg}(\beta x)\operatorname{ctg}(\gamma t)\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \operatorname{tg}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{ctg}(\mu t)$, $g_2(x) = \operatorname{tg}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{ctg}(\gamma t)$.

113. $\displaystyle\int_a^x \big[\operatorname{ctg}(\lambda x)\operatorname{tg}(\mu t) + \operatorname{ctg}(\beta x)\operatorname{tg}(\gamma t)\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \operatorname{ctg}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{tg}(\mu t)$, $g_2(x) = \operatorname{ctg}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{tg}(\gamma t)$.

114. $\displaystyle\int_a^x \big[\operatorname{tg}(\lambda x)\operatorname{tg}(\mu t) + \operatorname{ctg}(\beta x)\operatorname{ctg}(\gamma t)\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \operatorname{tg}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{tg}(\mu t)$, $g_2(x) = \operatorname{ctg}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{ctg}(\gamma t)$.

115. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{tg}^\beta(\lambda x) + B\operatorname{ctg}^\gamma(\mu t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{tg}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{ctg}^\gamma(\mu t)$.

116. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{ctg}^\beta(\lambda x) + B\operatorname{tg}^\gamma(\mu t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{ctg}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{tg}^\gamma(\mu t)$.

117. $\displaystyle\int_a^x (Ax^\lambda \operatorname{tg}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{ctg}^\gamma x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{tg}^\mu t$, $g_2(x) = B\operatorname{ctg}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

118. $\displaystyle\int_a^x (Ax^\lambda \operatorname{ctg}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{tg}^\gamma x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{ctg}^\mu t$, $g_2(x) = B\operatorname{tg}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.6. Уравнения, ядра которых содержат обратные тригонометрические функции

1.6-1. Ядра уравнений содержат арккосинус

1. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\arccos(\lambda x) - \arccos(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \arccos(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = -\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}\Bigl[\sqrt{1-\lambda^2x^2}\, f'_x(x)\Bigr].$

2. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\arccos(\lambda x) + B\arccos(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.6.1. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \arccos(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\bigl[\arccos(\lambda x)\bigr]^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x \bigl[\arccos(\lambda t)\bigr]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

3. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\arccos(\lambda x) + B\arccos(\mu t) + C\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\arccos(\lambda x)$, $h(t) = B\arccos(\mu t) + C$.

4. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\arccos(\lambda x) - \arccos(\lambda t)\bigr]^n y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям: $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f^{(n)}_x(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{(-1)^n}{\lambda^n n!\,\sqrt{1-\lambda^2x^2}}\left(\sqrt{1-\lambda^2x^2}\,\frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x).$$

5. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)}\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.38 при $g(x) = 1 - \arccos(\lambda x)$.
Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\varphi(x)\left(\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t) f(t)\, dt}{\sqrt{\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 x^2}}.$$

6. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\, dt}{\sqrt{\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)}} = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\varphi(t) f(t)\, dt}{\sqrt{\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 x^2}}.$$

7. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)\bigr]^\mu y(t)\, dt = f(x), \qquad 0 < \mu < 1.$

Решение:

$$y(x) = k\varphi(x)\left(\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t) f(t)\, dt}{[\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)]^\mu},$$
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 x^2}}, \quad k = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi\mu}.$$

8. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\arccos^\mu(\lambda x) - \arccos^\mu(\lambda t)\bigr] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \arccos^\mu(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = -\frac{1}{\lambda\mu}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)\sqrt{1-\lambda^2 x^2}}{\arccos^{\mu-1}(\lambda x)}\right].$

9. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\, dt}{\bigl[\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)\bigr]^\mu} = f(x), \qquad 0 < \mu < 1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda \sin(\pi\mu)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\varphi(t) f(t)\, dt}{[\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)]^{1-\mu}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 x^2}}.$$

10. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A \arccos^\beta(\lambda x) + B \arccos^\gamma(\mu t) + C\bigr] y(t)\, dt = f(x).$

См. уравнение 1.9.6 при $g(x) = A\arccos^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\arccos^\gamma(\mu t) + C$.

1.6-2. Ядра уравнений содержат арксинус

11. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)\bigr] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \arcsin(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}\Bigl[\sqrt{1-\lambda^2 x^2}\, f'_x(x)\Bigr].$

12. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\arcsin(\lambda x) + B\arcsin(\lambda t)\bigr]\,y(t)\,dt = f(x).$

При $B=-A$ см. уравнение 1.6.11. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x)=\arcsin(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{A+B}\,\frac{d}{dx}\biggl\{\bigl|\arcsin(\lambda x)\bigr|^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x \bigl|\arcsin(\lambda t)\bigr|^{-\frac{B}{A+B}} f_t'(t)\,dt\biggr\}.$$

13. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\arcsin(\lambda x) + B\arcsin(\mu t) + C\bigr]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x)=A\arcsin(\lambda x)$, $h(t)=B\arcsin(\mu t)+C$.

14. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)\bigr]^n\,y(t)\,dt = f(x), \qquad n=1,2,\dots$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям: $f(a)=f_x'(a)=\cdots=f_x^{(n)}(a)=0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda^n n!\sqrt{1-\lambda^2x^2}}\left(\sqrt{1-\lambda^2x^2}\,\frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x).$$

15. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)}\;y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\varphi(x)\left(\frac{1}{\varphi(x)}\,\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t)f(t)\,dt}{\sqrt{\arcsin(\lambda x)-\arcsin(\lambda t)}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2x^2}}.$$

16. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)}} = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda}{\pi}\,\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\varphi(t)f(t)\,dt}{\sqrt{\arcsin(\lambda x)-\arcsin(\lambda t)}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2x^2}}.$$

17. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)\bigr]^\mu\,y(t)\,dt = f(x), \qquad 0<\mu<1.$

Решение:

$$y(x) = k\varphi(x)\left(\frac{1}{\varphi(x)}\,\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t)f(t)\,dt}{[\arcsin(\lambda x)-\arcsin(\lambda t)]^\mu},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2x^2}}, \qquad k = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi\mu}.$$

18. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\arcsin^\mu(\lambda x) - \arcsin^\mu(\lambda t)\bigr]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x)=\arcsin^\mu(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\lambda\mu}\,\frac{d}{dx}\left[\frac{f_x'(x)\sqrt{1-\lambda^2x^2}}{\arcsin^{\mu-1}(\lambda x)}\right].$

19. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\bigl[\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)\bigr]^\mu} = f(x), \qquad 0<\mu<1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda\sin(\pi\mu)}{\pi}\,\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\varphi(t)f(t)\,dt}{[\arcsin(\lambda x)-\arcsin(\lambda t)]^{1-\mu}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2x^2}}.$$

20. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\arcsin^\beta(\lambda x) + B\arcsin^\gamma(\mu t) + C\bigr]\,y(t)\,dt = f(x).$

См. уравнение 1.9.6 при $g(x) = A\arcsin^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\arcsin^\gamma(\mu t) + C$.

1.6-3. Ядра уравнений содержат арктангенс

21. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)\bigr]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{arctg}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{d}{dx}\bigl[(1+\lambda^2x^2)\,f'_x(x)\bigr]$.

22. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{arctg}(\lambda x) + B\operatorname{arctg}(\lambda t)\bigr]\,y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.6.21. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{arctg}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{A+B}\frac{d}{dx}\biggl\{\bigl|\operatorname{arctg}(\lambda x)\bigr|^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x \bigl|\operatorname{arctg}(\lambda t)\bigr|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\biggr\}.$$

23. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{arctg}(\lambda x) + B\operatorname{arctg}(\mu t) + C\bigr]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{arctg}(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{arctg}(\mu t) + C$.

24. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)\bigr]^n\,y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям: $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f^{(n)}_x(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda^n n!\,(1+\lambda^2x^2)}\biggl((1+\lambda^2x^2)\,\frac{d}{dx}\biggr)^{n+1} f(x).$$

25. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)}\;y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\varphi(x)\biggl(\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d}{dx}\biggr)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t)f(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{1+\lambda^2x^2}.$$

26. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)}} = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\varphi(t)f(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{1+\lambda^2x^2}.$$

27. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{t}\,\operatorname{arctg}\biggl(\sqrt{\frac{x-t}{t}}\biggr)\,y(t)\,dt = f(x).$

Это уравнение можно записать с помощью гипергеометрической функции Гаусса в виде

$$\int_a^x (x-t)^{\gamma-1}F\Bigl(\alpha,\beta,\gamma;1-\frac{x}{t}\Bigr)y(t)\,dt = f(x), \qquad \text{где}\quad \alpha=\tfrac{1}{2},\quad \beta=1,\quad \gamma=\tfrac{3}{2}.$$

Решение этого уравнения см. в 1.8.86.

28. $\displaystyle\int_a^x \big[\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)\big]^\mu y(t)\,dt = f(x), \qquad 0<\mu<1.$

Решение:

$$y(x) = k\varphi(x)\left(\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t)f(t)\,dt}{[\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)]^\mu},$$
$$\varphi(x) = \frac{1}{1+\lambda^2x^2}, \quad k = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi\mu}.$$

29. $\displaystyle\int_a^x \big[\operatorname{arctg}^\mu(\lambda x) - \operatorname{arctg}^\mu(\lambda t)\big] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{arctg}^\mu(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{1}{\lambda\mu}\frac{d}{dx}\left[\frac{(1+\lambda^2x^2)f'_x(x)}{\operatorname{arctg}^{\mu-1}(\lambda x)}\right].$

30. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\big[\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)\big]^\mu} = f(x), \qquad 0<\mu<1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda\sin(\pi\mu)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\varphi(t)f(t)\,dt}{[\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)]^{1-\mu}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1+\lambda^2x^2}.$$

31. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{arctg}^\beta(\lambda x) + B\operatorname{arctg}^\gamma(\mu t) + C\big] y(t)\,dt = f(x).$

См. уравнение 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{arctg}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{arctg}^\gamma(\mu t) + C$.

1.6-4. Ядра уравнений содержат арккотангенс

32. $\displaystyle\int_a^x \big[\operatorname{arcctg}(\lambda x) - \operatorname{arcctg}(\lambda t)\big] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{arcctg}(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = -\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}\big[(1+\lambda^2x^2)\,f'_x(x)\big].$

33. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{arcctg}(\lambda x) + B\operatorname{arcctg}(\lambda t)\big] y(t)\,dt = f(x).$

При $B=-A$ см. уравнение 1.6.32. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{arcctg}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\big[\operatorname{arcctg}(\lambda x)\big]^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x \big[\operatorname{arcctg}(\lambda t)\big]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

34. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{arcctg}(\lambda x) + B\operatorname{arcctg}(\mu t) + C\big] y(t)\,dt = f(x).$

См. уравнение 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{arcctg}(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{arcctg}(\mu t) + C$.

35. $\displaystyle\int_a^x \big[\operatorname{arcctg}(\lambda x) - \operatorname{arcctg}(\lambda t)\big]^n y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям: $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f^{(n)}_x(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{(-1)^n}{\lambda^n n!\,(1+\lambda^2x^2)}\left((1+\lambda^2x^2)\frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x).$$

36. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{\operatorname{arcctg}(\lambda t) - \operatorname{arcctg}(\lambda x)}\, y(t)\, dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\varphi(x)\left(\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t)f(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{arcctg}(\lambda t) - \operatorname{arcctg}(\lambda x)}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{1+\lambda^2 x^2}.$$

37. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{arcctg}(\lambda t) - \operatorname{arcctg}(\lambda x)}} = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\varphi(t)f(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{arcctg}(\lambda t) - \operatorname{arcctg}(\lambda x)}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{1+\lambda^2 x^2}.$$

38. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{arcctg}(\lambda t) - \operatorname{arcctg}(\lambda x)\bigr]^\mu y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \mu < 1.$

Решение:

$$y(x) = k\varphi(x)\left(\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t)f(t)\,dt}{[\operatorname{arcctg}(\lambda t) - \operatorname{arcctg}(\lambda x)]^\mu},$$
$$\varphi(x) = \frac{1}{1+\lambda^2 x^2}, \quad k = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi\mu}.$$

39. $\displaystyle\int_a^x \bigl[\operatorname{arcctg}^\mu(\lambda x) - \operatorname{arcctg}^\mu(\lambda t)\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{arcctg}^\mu(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = -\frac{1}{\lambda\mu}\frac{d}{dx}\left[\frac{(1+\lambda^2x^2)f'_x(x)}{\operatorname{arcctg}^{\mu-1}(\lambda x)}\right].$

40. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\bigl[\operatorname{arcctg}(\lambda t) - \operatorname{arcctg}(\lambda x)\bigr]^\mu} = f(x), \qquad 0 < \mu < 1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda\sin(\pi\mu)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\varphi(t)f(t)\,dt}{[\operatorname{arcctg}(\lambda t) - \operatorname{arcctg}(\lambda x)]^{1-\mu}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{1+\lambda^2 x^2}.$$

41. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\operatorname{arcctg}^\beta(\lambda x) + B\operatorname{arcctg}^\gamma(\mu t) + C\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

См. уравнение 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{arcctg}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{arcctg}^\gamma(\mu t) + C$.

1.7. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций

1.7-1. Ядра содержат экспоненциальные и гиперболические функции

1. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl\{A_1\operatorname{ch}[\lambda_1(x-t)] + A_2\operatorname{ch}[\lambda_2(x-t)]\bigr\} y(t)\,dt = f(x).$

Замена $u(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.8:

$$\int_a^x \bigl\{A_1\operatorname{ch}[\lambda_1(x-t)] + A_2\operatorname{ch}[\lambda_2(x-t)]\bigr\} w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

2. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\operatorname{ch}^2[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x)=\varphi(x)-\frac{2\lambda^2}{k}\int_a^x e^{\mu(x-t)}\operatorname{sh}[k(x-t)]\varphi(x)\,dt,\qquad k=\lambda\sqrt{2},\quad \varphi(x)=f_x'(x)-\mu f(x).$$

3. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\operatorname{ch}^3[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.15:

$$\int_a^x \operatorname{ch}^3[\lambda(x-t)]w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

4. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\operatorname{ch}^4[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.19:

$$\int_a^x \operatorname{ch}^4[\lambda(x-t)]w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

5. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\big[\operatorname{ch}(\lambda x)-\operatorname{ch}(\lambda t)\big]^n y(t)\,dt = f(x),\qquad n=1,2,\ldots$

Решение:

$$y(x)=\frac{1}{\lambda^n n!}e^{\mu x}\operatorname{sh}(\lambda x)\left[\frac{1}{\operatorname{sh}(\lambda x)}\frac{d}{dx}\right]^{n+1}F_\mu(x),\qquad F_\mu(x)=e^{-\mu x}f(x).$$

6. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\sqrt{\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}t}\,y(t)\,dt = f(x),\qquad f(a)=0.$

Решение:

$$y(x)=\frac{2}{\pi}e^{\mu x}\operatorname{sh}x\left(\frac{1}{\operatorname{sh}x}\frac{d}{dx}\right)^2\int_a^x\frac{e^{-\mu t}\operatorname{sh}t\,f(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}t}}.$$

7. $\displaystyle\int_a^x \frac{e^{\mu(x-t)}y(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}t}} = f(x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{1}{\pi}e^{\mu x}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{e^{-\mu t}\operatorname{sh}t\,f(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}t}}.$$

8. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}(\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}t)^\lambda y(t)\,dt = f(x),\qquad 0<\lambda<1.$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.23:

$$\int_a^x (\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}t)^\lambda w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

9. $\displaystyle\int_a^x \big[Ae^{\mu(x-t)}+B\operatorname{ch}^\lambda x\big]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=Ae^{\mu x}$, $h_1(t)=e^{-\mu t}$, $g_2(x)=B\operatorname{ch}^\lambda x$, $h_2(t)=1$.

10. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\mu(x-t)} + B\operatorname{ch}^\lambda t\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) =$,
$h_2(t) = \operatorname{ch}^\lambda t$.

11. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}(\operatorname{ch}^\lambda x - \operatorname{ch}^\lambda t) y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.24:

$$\int_a^x (\operatorname{ch}^\lambda x - \operatorname{ch}^\lambda t) w(t)\,dt = e^{-\mu x} f(x).$$

12. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl(A\operatorname{ch}^\lambda x + B\operatorname{ch}^\lambda t\bigr) y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.25:

$$\int_a^x \bigl(A\operatorname{ch}^\lambda x + B\operatorname{ch}^\lambda t\bigr) w(t)\,dt = e^{-\mu x} f(x).$$

13. $\displaystyle\int_a^x \frac{e^{\mu(x-t)} y(t)\,dt}{(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^\lambda} = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} e^{\mu x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{-\mu t} \operatorname{sh} t\, f(t)\,dt}{(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^{1-\lambda}}.$$

14. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl\{A_1 \operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)] + A_2 \operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)]\bigr\} y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.41:

$$\int_a^x \bigl\{A_1 \operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)] + A_2 \operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)]\bigr\} w(t)\,dt = e^{-\mu x} f(x).$$

15. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)} \operatorname{sh}^2[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.43:

$$\int_a^x \operatorname{sh}^2[\lambda(x-t)] w(t)\,dt = e^{-\mu x} f(x).$$

16. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)} \operatorname{sh}^3[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.49:

$$\int_a^x \operatorname{sh}^3[\lambda(x-t)] w(t)\,dt = e^{-\mu x} f(x).$$

17. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)} \operatorname{sh}^n[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 2, 3, \ldots$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.54:

$$\int_a^x \operatorname{sh}^n[\lambda(x-t)] w(t)\,dt = e^{-\mu x} f(x).$$

18. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\operatorname{sh}\bigl(k\sqrt{x-t}\,\bigr)y(t)\,dt=f(x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{2}{\pi k}e^{\mu x}\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x\frac{e^{-\mu t}\cos\bigl(k\sqrt{x-t}\,\bigr)}{\sqrt{x-t}}f(t)\,dt.$$

19. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\sqrt{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}t}\,y(t)\,dt=f(x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{2}{\pi}e^{\mu x}\operatorname{ch}x\Bigl(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\frac{d}{dx}\Bigr)^2\int_a^x\frac{e^{-\mu t}\operatorname{ch}t\,f(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}t}}.$$

20. $\displaystyle\int_a^x\frac{e^{\mu(x-t)}y(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}t}}=f(x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{1}{\pi}e^{\mu x}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{e^{-\mu t}\operatorname{ch}t\,f(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}t}}.$$

21. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}(\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}t)^\lambda y(t)\,dt=f(x),\qquad 0<\lambda<1.$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.58:

$$\int_a^x(\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}t)^\lambda w(t)\,dt=e^{-\mu x}f(x).$$

22. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}(\operatorname{sh}^\lambda x-\operatorname{sh}^\lambda t)y(t)\,dt=f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.59:

$$\int_a^x(\operatorname{sh}^\lambda x-\operatorname{sh}^\lambda t)w(t)\,dt=e^{-\mu x}f(x).$$

23. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl(A\operatorname{sh}^\lambda x+B\operatorname{sh}^\lambda t\bigr)y(t)\,dt=f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.60:

$$\int_a^x\bigl(A\operatorname{sh}^\lambda x+B\operatorname{sh}^\lambda t\bigr)w(t)\,dt=e^{-\mu x}f(x).$$

24. $\displaystyle\int_a^x\bigl[Ae^{\mu(x-t)}+B\operatorname{sh}^\lambda x\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=Ae^{\mu x}$, $h_1(t)=e^{-\mu t}$, $g_2(x)=B\operatorname{sh}^\lambda x$, $h_2(t)=1$.

25. $\displaystyle\int_a^x\bigl[Ae^{\mu(x-t)}+B\operatorname{sh}^\lambda t\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=Ae^{\mu x}$, $h_1(t)=e^{-\mu t}$, $g_2(x)=B$, $h_2(t)=\operatorname{sh}^\lambda t$.

26. $\displaystyle\int_a^x\frac{e^{\mu(x-t)}y(t)\,dt}{(\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}t)^\lambda}=f(x),\qquad 0<\lambda<1.$

Решение:

$$y(x)=\frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi}e^{\mu x}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{e^{-\mu t}\operatorname{ch}t\,f(t)\,dt}{(\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}t)^{1-\lambda}}.$$

27. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl(A\operatorname{th}^\lambda x+B\operatorname{th}^\lambda t\bigr)y(t)\,dt=f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.77:

$$\int_a^x \bigl(A\operatorname{th}^\lambda x+B\operatorname{th}^\lambda t\bigr)w(t)\,dt=e^{-\mu x}f(x).$$

28. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl(A\operatorname{th}^\lambda x+B\operatorname{th}^\beta t+C\bigr)y(t)\,dt=f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.9.6 при $g(x)=A\operatorname{th}^\lambda x$, $h(t)=B\operatorname{th}^\beta t+C$:

$$\int_a^x \bigl(A\operatorname{th}^\lambda x+B\operatorname{th}^\beta t+C\bigr)w(t)\,dt=e^{-\mu x}f(x).$$

29. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\mu(x-t)}+B\operatorname{th}^\lambda x\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=Ae^{\mu x}$, $h_1(t)=e^{-\mu t}$, $g_2(x)=B\operatorname{th}^\lambda x$, $h_2(t)=1$.

30. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\mu(x-t)}+B\operatorname{th}^\lambda t\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=Ae^{\mu x}$, $h_1(t)=e^{-\mu t}$, $g_2(x)=B$, $h_2(t)=\operatorname{th}^\lambda t$.

31. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl(A\operatorname{cth}^\lambda x+B\operatorname{cth}^\lambda t\bigr)y(t)\,dt=f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.90:

$$\int_a^x \bigl(A\operatorname{cth}^\lambda x+B\operatorname{cth}^\lambda t\bigr)w(t)\,dt=e^{-\mu x}f(x).$$

32. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl(A\operatorname{cth}^\lambda x+B\operatorname{cth}^\beta t+C\bigr)y(t)\,dt=f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.9.6 при $g(x)=A\operatorname{cth}^\lambda x$, $h(t)=B\operatorname{cth}^\beta t+C$:

$$\int_a^x \bigl(A\operatorname{cth}^\lambda x+B\operatorname{cth}^\beta t+C\bigr)w(t)\,dt=e^{-\mu x}f(x).$$

33. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\mu(x-t)}+B\operatorname{cth}^\lambda x\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=Ae^{\mu x}$, $h_1(t)=e^{-\mu t}$, $g_2(x)=B\operatorname{cth}^\lambda x$, $h_2(t)=1$.

34. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\mu(x-t)}+B\operatorname{cth}^\lambda t\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=Ae^{\mu x}$, $h_1(t)=e^{-\mu t}$, $g_2(x)=B$, $h_2(t)=\operatorname{cth}^\lambda t$.

1.7-2. Ядра содержат экспоненциальные и логарифмические функции

35. $\displaystyle\int_a^x e^{\lambda(x-t)}(\ln x-\ln t)y(t)\,dt=f(x).$

Решение:

$$y(x)=e^{\lambda x}\bigl[x\varphi''_{xx}(x)+\varphi'_x(x)\bigr],\qquad \varphi(x)=e^{-\lambda x}f(x).$$

36. $\displaystyle\int_0^x e^{\lambda(x-t)}\ln(x-t)y(t)\,dt=f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\lambda x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.4.2:

$$\int_0^x \ln(x-t)w(t)\,dt=e^{-\lambda x}f(x).$$

37. $\displaystyle\int_a^x e^{\lambda(x-t)}(A\ln x+B\ln t)y(t)\,dt=f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\lambda x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.4.4:

$$\int_a^x (A\ln x+B\ln t)w(t)\,dt=e^{-\lambda x}f(x).$$

38. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl[A\ln^2(\lambda x)+B\ln^2(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\lambda x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.4.7:

$$\int_a^x \bigl[A\ln^2(\lambda x)+B\ln^2(\lambda t)\bigr]w(t)\,dt=e^{-\lambda x}f(x).$$

39. $\displaystyle\int_a^x e^{\lambda(x-t)}\bigl[\ln(x/t)\bigr]^n y(t)\,dt=f(x),\qquad n=1,2,\dots$

Решение:

$$y(x)=\frac{1}{n!\,x}e^{\lambda x}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n+1}F_\lambda(x),\qquad F_\lambda(x)=e^{-\lambda x}f(x).$$

40. $\displaystyle\int_a^x e^{\lambda(x-t)}\sqrt{\ln(x/t)}\,y(t)\,dt=f(x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{2e^{\lambda x}}{\pi x}\left(x\frac{d}{dx}\right)^2\int_a^x\frac{e^{-\lambda t}f(t)\,dt}{t\sqrt{\ln(x/t)}}.$$

41. $\displaystyle\int_a^x \frac{e^{\lambda(x-t)}}{\sqrt{\ln(x/t)}}y(t)\,dt=f(x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{1}{\pi}e^{\lambda x}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{e^{-\lambda t}f(t)\,dt}{t\sqrt{\ln(x/t)}}.$$

42. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\mu(x-t)}+B\ln^\nu(\lambda x)\bigr]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=Ae^{\mu x}$, $h_1(t)=e^{-\mu t}$, $g_2(x)$ $=B\ln^\nu(\lambda x)$, $h_2(t)=1$.

43. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\mu(x-t)} + B\ln^\nu(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = \ln^\nu(\lambda t)$.

44. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}[\ln(x/t)]^\lambda y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.4.16:

$$\int_a^x [\ln(x/t)]^\lambda w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

45. $\displaystyle\int_a^x \frac{e^{\mu(x-t)}}{[\ln(x/t)]^\lambda}y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi}e^{\mu x}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{te^{\mu t}[\ln(x/t)]^{1-\lambda}}.$$

1.7-3. Ядра содержат экспоненциальные и тригонометрические функции

46. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\cos[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $\displaystyle y(x) = f'_x(x) - \mu f(x) + \lambda^2\int_a^x e^{\mu(x-t)}f(t)\,dt.$

47. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl\{A_1\cos[\lambda_1(x-t)] + A_2\cos[\lambda_2(x-t)]\bigr\}y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.8:

$$\int_a^x \bigl\{A_1\cos[\lambda_1(x-t)] + A_2\cos[\lambda_2(x-t)]\bigr\}w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

48. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\cos^2[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.9.
Решение:

$$y(x) = \varphi(x) + \frac{2\lambda^2}{k}\int_a^x e^{\mu(x-t)}\sin[k(x-t)]\varphi(t)\,dt, \qquad k = \lambda\sqrt{2}, \quad \varphi(x) = f'_x(x) - \mu f(x).$$

49. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\cos^3[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.15:

$$\int_a^x \cos^3[\lambda(x-t)]w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

50. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\cos^4[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.19:

$$\int_a^x \cos^4[\lambda(x-t)]w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

51. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\big[\cos(\lambda x)-\cos(\lambda t)\big]^n y(t)\,dt=f(x),\qquad n=1,2,\ldots$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям: $f(a)=f'_x(a)=\cdots=f_x^{(n)}(a)=0$.

Решение:

$$y(x)=\frac{(-1)^n}{\lambda^n n!}e^{\mu x}\sin(\lambda x)\left[\frac{1}{\sin(\lambda x)}\frac{d}{dx}\right]^{n+1}F_\mu(x),\qquad F_\mu(x)=e^{-\mu x}f(x).$$

52. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\sqrt{\cos t-\cos x}\,y(t)\,dt=f(x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{2}{\pi}e^{\mu x}\sin x\left(\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\right)^2\int_a^x\frac{e^{-\mu t}\sin t\,f(t)\,dt}{\sqrt{\cos t-\cos x}}.$$

53. $\displaystyle\int_a^x\frac{e^{\mu(x-t)}y(t)\,dt}{\sqrt{\cos t-\cos x}}=f(x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{1}{\pi}e^{\mu x}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{e^{-\mu t}\sin t\,f(t)\,dt}{\sqrt{\cos t-\cos x}}.$$

54. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}(\cos t-\cos x)^\lambda y(t)\,dt=f(x),\qquad 0<\lambda<1.$

Решение:

$$y(x)=ke^{\mu x}\sin x\left(\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\right)^2\int_a^x\frac{e^{-\mu t}\sin t\,f(t)\,dt}{(\cos t-\cos x)^\lambda},\qquad k=\frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

55. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}(\cos^\lambda x-\cos^\lambda t)y(t)\,dt=f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.24:

$$\int_a^x(\cos^\lambda x-\cos^\lambda t)w(t)\,dt=e^{-\mu x}f(x).$$

56. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\big(A\cos^\lambda x+B\cos^\lambda t\big)y(t)\,dt=f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.25:

$$\int_a^x\big(A\cos^\lambda x+B\cos^\lambda t\big)w(t)\,dt=e^{-\mu x}f(x).$$

57. $\displaystyle\int_a^x\frac{e^{\mu(x-t)}y(t)\,dt}{(\cos t-\cos x)^\lambda}=f(x),\qquad 0<\lambda<1.$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.26:

$$\int_a^x\frac{w(t)\,dt}{(\cos t-\cos x)^\lambda}=e^{-\mu x}f(x).$$

58. $\displaystyle\int_a^x\big[Ae^{\mu(x-t)}+B\cos^\nu(\lambda x)\big]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=Ae^{\mu x}$, $h_1(t)=e^{-\mu t}$, $g_2(x)=B\cos^\nu(\lambda x)$, $h_2(t)=1$.

59. $\displaystyle\int_a^x \big[Ae^{\mu(x-t)} + B\cos^\nu(\lambda t)\big]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) =$. $h_2(t) = \cos^\nu(\lambda t)$.

60. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\sin[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda}\big[f''_{xx}(x) - 2\mu f'_x(x) + (\lambda^2+\mu^2)f(x)\big]$.

61. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\big\{A_1\sin[\lambda_1(x-t)] + A_2\sin[\lambda_2(x-t)]\big\}y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.41:

$$\int_a^x \big\{A_1\sin[\lambda_1(x-t)] + A_2\sin[\lambda_2(x-t)]\big\}w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

62. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\sin^2[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.43:

$$\int_a^x \sin^2[\lambda(x-t)]w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

63. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\sin^3[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.49:

$$\int_a^x \sin^3[\lambda(x-t)]w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

64. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\sin^n[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 2, 3, \ldots$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.54:

$$\int_a^x \sin^n[\lambda(x-t)]w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

65. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\sin\big(k\sqrt{x-t}\big)y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi k}e^{\mu x}\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x \frac{e^{-\mu t}\operatorname{ch}\big(k\sqrt{x-t}\big)}{\sqrt{x-t}}f(t)\,dt.$$

66. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\sqrt{\sin x - \sin t}\,y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi}e^{\mu x}\cos x\Big(\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}\Big)^2\int_a^x \frac{e^{-\mu t}\cos t\,f(t)\,dt}{\sqrt{\sin x - \sin t}}.$$

67. $\displaystyle\int_a^x \frac{e^{\mu(x-t)}y(t)\,dt}{\sqrt{\sin x - \sin t}} = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi}e^{\mu x}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{e^{-\mu t}\cos t\,f(t)\,dt}{\sqrt{\sin x - \sin t}}.$$

68. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}(\sin x-\sin t)^\lambda y(t)\,dt=f(x),\qquad 0<\lambda<1.$

Решение:

$$y(x)=ke^{\mu x}\cos x\Big(\frac{1}{\cos x}\,\frac{d}{dx}\Big)^2\int_a^x\frac{e^{-\mu t}\cos t\,f(t)\,dt}{(\sin x-\sin t)^\lambda},\qquad k=\frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

69. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}(\sin^\lambda x-\sin^\lambda t)y(t)\,dt=f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.59:

$$\int_a^x(\sin^\lambda x-\sin^\lambda t)w(t)\,dt=e^{-\mu x}f(x).$$

70. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\big(A\sin^\lambda x+B\sin^\lambda t\big)y(t)\,dt=f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.9.4 при $g(x)=\sin^\lambda x$:

$$\int_a^x\big(A\sin^\lambda x+B\sin^\lambda t\big)w(t)\,dt=e^{-\mu x}f(x).$$

71. $\displaystyle\int_a^x\frac{e^{\mu(x-t)}y(t)\,dt}{(\sin x-\sin t)^\lambda}=f(x),\qquad 0<\lambda<1.$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.61:

$$\int_a^x\frac{w(t)\,dt}{(\sin x-\sin t)^\lambda}=e^{-\mu x}f(x).$$

72. $\displaystyle\int_a^x\big[Ae^{\mu(x-t)}+B\sin^\nu(\lambda x)\big]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=Ae^{\mu x}$, $h_1(t)=e^{-\mu t}$, $g_2(x)=$ $=B\sin^\nu(\lambda x)$, $h_2(t)=1$.

73. $\displaystyle\int_a^x\big[Ae^{\mu(x-t)}+B\sin^\nu(\lambda t)\big]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=Ae^{\mu x}$, $h_1(t)=e^{-\mu t}$, $g_2(x)=B$, $h_2(t)=\sin^\nu(\lambda t)$.

74. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\big(A\,\mathrm{tg}^\lambda x+B\,\mathrm{tg}^\lambda t\big)y(t)\,dt=f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.77:

$$\int_a^x\big(A\,\mathrm{tg}^\lambda x+B\,\mathrm{tg}^\lambda t\big)w(t)\,dt=e^{-\mu x}f(x).$$

75. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\big(A\,\mathrm{tg}^\lambda x+B\,\mathrm{tg}^\beta t+C\big)y(t)\,dt=f(x).$

Замена $w(x)=e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.9.6:

$$\int_a^x\big(A\,\mathrm{tg}^\lambda x+B\,\mathrm{tg}^\beta t+C\big)w(t)\,dt=e^{-\mu x}f(x).$$

76. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\mu(x-t)} + B\,\mathrm{tg}^\nu(\lambda x)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B\,\mathrm{tg}^\nu(\lambda x)$, $h_2(t) = 1$.

77. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\mu(x-t)} + B\,\mathrm{tg}^\nu(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = \mathrm{tg}^\nu(\lambda t)$.

78. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl(A\,\mathrm{ctg}^\lambda x + B\,\mathrm{ctg}^\lambda t\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.90:

$$\int_a^x \bigl(A\,\mathrm{ctg}^\lambda x + B\,\mathrm{ctg}^\lambda t\bigr)w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

79. $\displaystyle\int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl(A\,\mathrm{ctg}^\lambda x + B\,\mathrm{ctg}^\beta t + C\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.9.6:

$$\int_a^x \bigl(A\,\mathrm{ctg}^\lambda x + B\,\mathrm{ctg}^\beta t + C\bigr)w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

80. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\mu(x-t)} + B\,\mathrm{ctg}^\nu(\lambda x)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B\,\mathrm{ctg}^\nu(\lambda x)$, $h_2(t) = 1$.

81. $\displaystyle\int_a^x \bigl[Ae^{\mu(x-t)} + B\,\mathrm{ctg}^\nu(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = \mathrm{ctg}^\nu(\lambda t)$.

1.7-4. Ядра содержат гиперболические и логарифмические функции

82. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\,\mathrm{ch}^\beta(\lambda x) + B\ln^\gamma(\mu t) + C\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\,\mathrm{ch}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\ln^\gamma(\mu t) + C$.

83. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\,\mathrm{ch}^\beta(\lambda t) + B\ln^\gamma(\mu x) + C\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B\ln^\gamma(\mu x) + C$, $h(t) = A\,\mathrm{ch}^\beta(\lambda t)$.

84. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\,\mathrm{sh}^\beta(\lambda x) + B\ln^\gamma(\mu t) + C\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\,\mathrm{sh}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\ln^\gamma(\mu t) + C$.

85. $\displaystyle\int_a^x \bigl[A\,\mathrm{sh}^\beta(\lambda t) + B\ln^\gamma(\mu x) + C\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B\ln^\gamma(\mu x)$, $h(t) = A\,\mathrm{sh}^\beta(\lambda t) + C$.

86. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{th}^\beta(\lambda x) + B\ln^\gamma(\mu t) + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{th}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\ln^\gamma(\mu t) + C$.

87. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{th}^\beta(\lambda t) + B\ln^\gamma(\mu x) + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B\ln^\gamma(\mu x)$, $h(t) = A\operatorname{th}^\beta(\lambda t) + C$.

88. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{cth}^\beta(\lambda x) + B\ln^\gamma(\mu t) + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{cth}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\ln^\gamma(\mu t) + C$.

89. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{cth}^\beta(\lambda t) + B\ln^\gamma(\mu x) + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B\ln^\gamma(\mu x)$, $h(t) = A\operatorname{cth}^\beta(\lambda t) + C$.

1.7-5. Ядра содержат гиперболические и тригонометрические функции

90. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{ch}^\beta(\lambda x) + B\cos^\gamma(\mu t) + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{ch}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\cos^\gamma(\mu t) + C$.

91. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{ch}^\beta(\lambda t) + B\sin^\gamma(\mu x) + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B\sin^\gamma(\mu x) + C$, $h(t) = A\operatorname{ch}^\beta(\lambda t)$.

92. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{ch}^\beta(\lambda x) + B\operatorname{tg}^\gamma(\mu t) + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{ch}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{tg}^\gamma(\mu t) + C$.

93. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{sh}^\beta(\lambda x) + B\cos^\gamma(\mu t) + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{sh}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\cos^\gamma(\mu t) + C$.

94. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{sh}^\beta(\lambda t) + B\sin^\gamma(\mu x) + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B\sin^\gamma(\mu x)$, $h(t) = A\operatorname{sh}^\beta(\lambda t) + C$.

95. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{sh}^\beta(\lambda x) + B\operatorname{tg}^\gamma(\mu t) + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{sh}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\operatorname{tg}^\gamma(\mu t) + C$.

96. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{th}^\beta(\lambda x) + B\cos^\gamma(\mu t) + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{th}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\cos^\gamma(\mu t) + C$.

97. $\displaystyle\int_a^x \big[A\operatorname{th}^\beta(\lambda x) + B\sin^\gamma(\mu t) + C\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\operatorname{th}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\sin^\gamma(\mu t) + C$.

1.7-6. Ядра содержат логарифмические и тригонометрические функции

98. $\displaystyle\int_a^x \big[A\cos^\beta(\lambda x) + B\ln^\gamma(\mu t) + C\big] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\cos^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\ln^\gamma(\mu t) + C$.

99. $\displaystyle\int_a^x \big[A\cos^\beta(\lambda t) + B\ln^\gamma(\mu x) + C\big] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B\ln^\gamma(\mu x) + C$, $h(t) = A\cos^\beta(\lambda t)$.

100. $\displaystyle\int_a^x \big[A\sin^\beta(\lambda x) + B\ln^\gamma(\mu t) + C\big] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A\sin^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B\ln^\gamma(\mu t) + C$.

101. $\displaystyle\int_a^x \big[A\sin^\beta(\lambda t) + B\ln^\gamma(\mu x) + C\big] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B\ln^\gamma(\mu x)$, $h(t) = A\sin^\beta(\lambda t) + C$.

1.8. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции

1.8-1. Ядра уравнений содержат функции Бесселя

1. $\displaystyle\int_a^x J_0[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right)^2 \int_a^x (x-t)\,J_1[\lambda(x-t)]\,f(t)\,dt.$$

В частном случае $\lambda = 1$ при $f(x) = A\sin x$ решение дается формулой $y(x) = AJ_0(x)$.

2. $\displaystyle\int_a^x [J_0(\lambda x) - J_0(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $\displaystyle y(x) = -\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\lambda J_1(\lambda x)}\right].$

3. $\displaystyle\int_a^x [AJ_0(\lambda x) + BJ_0(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.8.2. Рассматриваем область $[a, x]$, в которой функция $J_0(\lambda x)$ не меняет знака.

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \pm\frac{1}{A+B}\,\frac{d}{dx}\left\{\big|J_0(\lambda x)\big|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x \big|J_0(\lambda t)\big|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

Берется тот же знак, который имеет функция $J_0(\lambda x)$.

4. $\displaystyle\int_a^x (x-t)\, J_0[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:
$$y(x) = \int_a^x g(t)\,dt,$$
где
$$g(t) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2\right)^3 \int_a^t (t-\tau)\, J_1[\lambda(t-\tau)]\, f(\tau)\,d\tau.$$

5. $\displaystyle\int_a^x (x-t) J_1[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:
$$y(x) = \frac{1}{3\lambda^3}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right)^4 \int_a^x (x-t)^2\, J_2[\lambda(x-t)]\, f(t)\,dt.$$

6. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^2\, J_1[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:
$$y(x) = \int_a^x g(t)\,dt,$$
где
$$g(t) = \frac{1}{9\lambda^3}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2\right)^5 \int_a^t (t-\tau)^2\, J_2[\lambda(t-\tau)]\, f(\tau)\,d\tau.$$

7. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^n\, J_n[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Решение:
$$y(x) = A\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right)^{2n+2} \int_a^x (x-t)^{n+1}\, J_{n+1}[\lambda(x-t)]\, f(t)\,dt,$$
$$A = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{2n+1} \frac{n!\,(n+1)!}{(2n)!\,(2n+2)!}.$$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f_x^{(2n+1)}(a) = 0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде
$$y(x) = A\int_a^x (x-t)^{2n+1} J_{2n+1}[\lambda(x-t)]F(t)\,dt, \qquad F(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2\right)^{2n+2} f(t)\,dt.$$

8. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{n+1} J_n[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Решение:
$$y(x) = \int_a^x g(t)\,dt,$$
где
$$g(t) = A\left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2\right)^{2n+3} \int_a^t (t-\tau)^{n+1}\, J_{n+1}[\lambda(t-\tau)]\, f(\tau)\,d\tau,$$
$$A = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{2n+1} \frac{n!\,(n+1)!}{(2n+1)!\,(2n+2)!}.$$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f_x^{(2n+2)}(a) = 0$, то функцию $g(t)$, определяющую решение, можно записать в виде

$$g(t) = A\int_a^t (t-\tau)^{n-\nu-2} J_{n-\nu-2}[\lambda(t-\tau)]F(\tau)\,d\tau, \qquad F(\tau) = \left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\lambda^2\right)^{2n+2} f(\tau).$$

9. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{1/2} J_{1/2}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{\pi}{4\lambda^2}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2\right)^3 \int_a^x (x-t)^{3/2}\, J_{3/2}[\lambda(x-t)]\, f(t)\,dt.$$

10. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{3/2} J_{1/2}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t)\,dt,$$

где

$$g(t) = \frac{\pi}{8\lambda^2}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\lambda^2\right)^4 \int_a^t (t-\tau)^{3/2}\, J_{3/2}[\lambda(t-\tau)]\, f(\tau)\,d\tau.$$

11. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{3/2} J_{3/2}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3/2}\lambda^{5/2}}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2\right)^3 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]\, f(t)\,dt.$$

12. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{5/2} J_{3/2}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t)\,dt,$$

где

$$g(t) = \frac{\pi}{128\lambda^4}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\lambda^2\right)^6 \int_a^t (t-\tau)^{5/2}\, J_{5/2}[\lambda(t-\tau)]\, f(\tau)\,d\tau.$$

13. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{\frac{2n-1}{2}} J_{\frac{2n-1}{2}}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 2, 3, \ldots$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\,\lambda^{\frac{2n+1}{2}}(2n-2)!!}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2\right)^n \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]\, f(t)\,dt.$$

14. $\displaystyle\int_a^x [J_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = J_\nu(\lambda x)$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{xf'_x(x)}{\nu J_\nu(\lambda x) - \lambda x J_{\nu+1}(\lambda x)}\right].$

15. $\displaystyle\int_a^x [AJ_\nu(\lambda x) + BJ_\nu(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.8.14. Рассматриваем область $[a, x]$, в которой функция $J_\nu(\lambda x)$ не меняет знака.

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \pm\frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\left|J_\nu(\lambda x)\right|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x \left|J_\nu(\lambda t)\right|^{-\frac{B}{A+B}} f_t'(t)\,dt\right\}.$$

Берется тот же знак, который имеет функция $J_\nu(\lambda x)$.

16. $\displaystyle\int_a^x [AJ_\nu(\lambda x) + BJ_\mu(\beta t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = AJ_\nu(\lambda x)$, $h(t) = BJ_\mu(\beta t)$.

17. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^\nu J_\nu[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = A\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\nu-1}\, J_{n-\nu-1}[\lambda(x-t)]\, f(t)\,dt,$$

$$A = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n-1} \frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(n-\nu)}{\Gamma(2\nu+1)\,\Gamma(2n-2\nu-1)},$$

где $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{n-1}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f_x'(a) = \cdots = f_x^{(n-1)}(a) = 0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$y(x) = A\int_a^x (x-t)^{n-\nu-1}\, J_{n-\nu-1}[\lambda(x-t)]F(t)\,dt, \qquad F(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2\right)^n f(t).$$

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 530).

18. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{\nu+1} J_\nu[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t)\,dt,$$

где

$$g(t) = A\left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\nu-2}\, J_{n-\nu-2}[\lambda(t-\tau)]\, f(\tau)\,d\tau,$$

$$A = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n-2} \frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(n-\nu-1)}{\Gamma(2\nu+2)\,\Gamma(2n-2\nu-3)},$$

где $-1 < \nu < \frac{n}{2} - 1$, $n = 1, 2, \ldots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f_x'(a) = \cdots = f_x^{(n-1)}(a) = 0$, то функцию $g(t)$, определяющую решение, можно записать в виде

$$g(t) = A\int_a^t (t-\tau)^{n-\nu-2}\, J_{n-\nu-2}[\lambda(t-\tau)]F(\tau)\,d\tau, \qquad F(\tau) = \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \lambda^2\right)^n f(\tau).$$

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 530).

19. $\displaystyle\int_a^x J_0\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)\,y(t)\,dt = f(x).$

Решение:
$$y(x) = \frac{d^2}{dx^2}\int_a^x I_0\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)\,f(t)\,dt.$$

20. $\displaystyle\int_a^x \bigl[AJ_\nu\bigl(\lambda\sqrt{x}\bigr) + BJ_\nu\bigl(\lambda\sqrt{t}\bigr)\bigr]\,y(t)\,dt = f(x).$

Рассматриваем область $[a,x]$, в которой функция $J_\nu\bigl(\lambda\sqrt{x}\bigr)$ не меняет знака. Решение при $B \neq -A$:
$$y(x) = \pm\frac{1}{A+B}\,\frac{d}{dx}\biggl\{\bigl|J_\nu\bigl(\lambda\sqrt{x}\bigr)\bigr|^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x \bigl|J_\nu\bigl(\lambda\sqrt{t}\bigr)\bigr|^{-\frac{B}{A+B}}\,f'_t(t)\,dt\biggr\}.$$

Берется тот же знак, который имеет функция $J_\nu\bigl(\lambda\sqrt{x}\bigr)$.

21. $\displaystyle\int_a^x \bigl[AJ_\nu\bigl(\lambda\sqrt{x}\bigr) + BJ_\mu\bigl(\beta\sqrt{t}\bigr)\bigr]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = AJ_\nu\bigl(\lambda\sqrt{x}\bigr)$, $h(t) = BJ_\mu\bigl(\beta\sqrt{t}\bigr)$.

22. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{x-t}\,J_1\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)\,y(t)\,dt = f(x).$

Решение:
$$y(x) = \frac{2}{\lambda}\,\frac{d^3}{dx^3}\int_a^x I_0\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)\,f(t)\,dt.$$

23. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{1/4} J_{1/2}\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)\,y(t)\,dt = f(x).$

Решение:
$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\,\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x \frac{\operatorname{ch}\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)}{\sqrt{x-t}}\,f(t)\,dt.$$

24. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{3/4} J_{3/2}\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)\,y(t)\,dt = f(x).$

Решение:
$$y(x) = \frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi}\,\lambda^{3/2}}\,\frac{d^3}{dx^3}\int_a^x \frac{\operatorname{ch}\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)}{\sqrt{x-t}}\,f(t)\,dt.$$

25. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{n/2} J_n\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)\,y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Решение:
$$y(x) = \Bigl(\frac{2}{\lambda}\Bigr)^n \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\int_a^x I_0\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)\,f(t)\,dt.$$

26. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{\frac{2n-3}{4}} J_{\frac{2n-3}{2}}\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)\,y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Решение:
$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Bigl(\frac{2}{\lambda}\Bigr)^{\frac{2n-3}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\int_a^x \frac{\operatorname{ch}\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)}{\sqrt{x-t}}\,f(t)\,dt.$$

27. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{-1/4} J_{-1/2}\big(\lambda\sqrt{x-t}\,\big) y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\,\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\operatorname{ch}\big(\lambda\sqrt{x-t}\,\big)}{\sqrt{x-t}}\,f(t)\,dt.$$

28. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{\nu/2} J_\nu\big(\lambda\sqrt{x-t}\,\big) y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \Big(\frac{2}{\lambda}\Big)^{n-2}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{\frac{n-\nu-2}{2}}\,I_{n-\nu-2}\big(\lambda\sqrt{x-t}\,\big) f(t)\,dt,$$

где $-1<\nu<n-1$, $n=1,2,\ldots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a)=f'_x(a)=\cdots=f^{(n-1)}_x(a)=0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$y(x) = \Big(\frac{2}{\lambda}\Big)^{n-2}\int_a^x (x-t)^{\frac{n-\nu-2}{2}}\,I_{n-\nu-2}\big(\lambda\sqrt{x-t}\,\big) f^{(n)}_t(t)\,dt.$$

29. $\displaystyle\int_0^x \big(x^2-t^2\big)^{-1/4} J_{-1/2}\big(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\,\big) y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}\,\frac{d}{dx}\int_0^x t\,\frac{\operatorname{ch}\big(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\,\big)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,f(t)\,dt.$$

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 535).

30. $\displaystyle\int_x^\infty \big(t^2-x^2\big)^{-1/4} J_{-1/2}\big(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\,\big) y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = -\sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}\,\frac{d}{dx}\int_x^\infty t\,\frac{\operatorname{ch}\big(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\,\big)}{\sqrt{t^2-x^2}}\,f(t)\,dt.$$

31. $\displaystyle\int_0^x \big(x^2-t^2\big)^{\nu/2} J_\nu\big(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\,\big) y(t)\,dt = f(x), \qquad -1<\nu<0.$

Решение:

$$y(x) = \lambda\frac{d}{dx}\int_0^x t\,\big(x^2-t^2\big)^{-(\nu+1)/2} I_{-\nu-1}\big(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\,\big) f(t)\,dt.$$

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 535).

32. $\displaystyle\int_x^\infty \big(t^2-x^2\big)^{\nu/2} J_\nu\big(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\,\big) y(t)\,dt = f(x), \qquad -1<\nu<0.$

Решение:

$$y(x) = -\lambda\frac{d}{dx}\int_x^\infty t\,\big(t^2-x^2\big)^{-(\nu+1)/2} I_{-\nu-1}\big(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\,\big) f(t)\,dt.$$

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 535).

33. $\displaystyle\int_a^x [At^k J_\nu(\lambda x) + Bx^m J_\mu(\lambda t)] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=AJ_\nu(\lambda x)$, $h_1(t)=t^k$, $g_2(x)=Bx^m$, $h_2(t)=J_\mu(\lambda t)$.

34. $\displaystyle\int_a^x [AJ_\nu^2(\lambda x) + BJ_\nu^2(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\left|J_\nu(\lambda x)\right|^{-\frac{2A}{A+B}} \int_a^x \left|J_\nu(\lambda t)\right|^{-\frac{2B}{A+B}} f_t'(t)\,dt\right\}.$$

35. $\displaystyle\int_a^x \bigl[AJ_\nu^k(\lambda x) + BJ_\mu^m(\beta t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = AJ_\nu^k(\lambda x)$, $h(t) = BJ_\mu^m(\beta t)$.

36. $\displaystyle\int_a^x [Y_0(\lambda x) - Y_0(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $\displaystyle y(x) = -\frac{d}{dx}\left[\frac{f_x'(x)}{\lambda Y_1(\lambda x)}\right].$

37. $\displaystyle\int_a^x [Y_\nu(\lambda x) - Y_\nu(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{xf_x'(x)}{\nu Y_\nu(\lambda x) - \lambda x Y_{\nu+1}(\lambda x)}\right].$

38. $\displaystyle\int_a^x [AY_\nu(\lambda x) + BY_\nu(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.8.37. Рассматриваем область $[a, x]$, в которой функция $Y_\nu(\lambda x)$ не меняет знака.

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \pm\frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\left|Y_\nu(\lambda x)\right|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x \left|Y_\nu(\lambda t)\right|^{-\frac{B}{A+B}} f_t'(t)\,dt\right\}.$$

Берется тот же знак, который имеет функция $Y_\nu(\lambda x)$.

39. $\displaystyle\int_a^x [At^k Y_\nu(\lambda x) + Bx^m Y_\mu(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = AY_\nu(\lambda x)$, $h_1(t) = t^k$, $g_2(x) = Bx^m$, $h_2(t) = Y_\mu(\lambda t)$.

40. $\displaystyle\int_a^x [AJ_\nu(\lambda x)Y_\mu(\beta t) + BJ_\nu(\lambda t)Y_\mu(\beta x)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = AJ_\nu(\lambda x)$, $h_1(t) = Y_\mu(\beta t)$, $g_2(x) = BY_\mu(\beta x)$, $h_2(t) = J_\nu(\lambda t)$.

1.8-2. Ядра уравнений содержат модифицированные функции Бесселя

41. $\displaystyle\int_a^x I_0[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)^2 \int_a^x (x-t)\,I_1[\lambda(x-t)]\,f(t)\,dt.$$

42. $\displaystyle\int_a^x [I_0(\lambda x) - I_0(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение: $y(x) = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f'_x(x)}{\lambda I_1(\lambda x)}\right].$

43. $\displaystyle\int_a^x [AI_0(\lambda x) + BI_0(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.8.42. Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \pm\frac{1}{A+B}\,\frac{d}{dx}\left\{\bigl|I_0(\lambda x)\bigr|^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x \bigl|I_0(\lambda t)\bigr|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

Берется тот же знак, который имеет функция $I_\nu(\lambda x)$.

44. $\displaystyle\int_a^x (x-t)I_0[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t)\,dt,$$

где

$$g(t) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2\right)^3 \int_a^t (t-\tau)\,I_1[\lambda(t-\tau)]\,f(\tau)\,d\tau.$$

45. $\displaystyle\int_a^x (x-t)I_1[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{3\lambda^3}\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)^4 \int_a^x (x-t)^2\,I_2[\lambda(x-t)]\,f(t)\,dt.$$

46. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^2\,I_1[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t)\,dt,$$

где

$$g(t) = \frac{1}{9\lambda^3}\left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2\right)^5 \int_a^t (t-\tau)^2\,I_2[\lambda(t-\tau)]\,f(\tau)\,d\tau.$$

47. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^n I_n[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Решение:

$$y(x) = A\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)^{2n+2} \int_a^x (x-t)^{n+1}\,I_{n+1}[\lambda(x-t)]\,f(t)\,dt,$$
$$A = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{2n+1}\frac{n!\,(n+1)!}{(2n)!\,(2n+2)!}.$$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f'_x(a) = \cdots = f_x^{(2n+1)}(a) = 0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$y(x) = A\int_a^x (x-t)^{2n+1} I_{2n+1}[\lambda(x-t)]F(t)\,dt, \qquad F(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2\right)^{2n+2} f(t).$$

48. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{n+1} I_n[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad n=0,1,2,\dots$

Решение:

$$y(x)=\int_a^x g(t)\,dt,$$

где

$$g(t)=A\biggl(\frac{d^2}{dt^2}-\lambda^2\biggr)^{2n+3}\int_a^t (t-\tau)^{n+1}\,I_{n+1}[\lambda(t-\tau)]\,f(\tau)\,d\tau,$$
$$A=\Bigl(\frac{2}{\lambda}\Bigr)^{2n+1}\frac{n!\,(n+1)!}{(2n+1)!\,(2n+2)!}.$$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a)=f'_x(a)=\cdots=f_x^{(2n+2)}(a)=0$, то функцию $g(t)$, определяющую решение, можно записать в виде

$$g(t)=A\int_a^t (t-\tau)^{n-\nu-2}\,I_{n-\nu-2}[\lambda(t-\tau)]F(\tau)\,d\tau, \qquad F(\tau)=\biggl(\frac{d^2}{d\tau^2}-\lambda^2\biggr)^{2n+2}f(\tau).$$

49. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{1/2} I_{1/2}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{\pi}{4\lambda^2}\biggl(\frac{d^2}{dx^2}-\lambda^2\biggr)^3\int_a^x (x-t)^{3/2}\,I_{3/2}[\lambda(x-t)]\,f(t)\,dt.$$

50. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{3/2} I_{1/2}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x)=\int_a^x g(t)\,dt,$$

где

$$g(t)=\frac{\pi}{8\lambda^2}\biggl(\frac{d^2}{dt^2}-\lambda^2\biggr)^4\int_a^t (t-\tau)^{3/2}I_{3/2}[\lambda(t-\tau)]\,f(\tau)\,d\tau.$$

51. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{3/2} I_{3/2}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{3/2}\lambda^{5/2}}\biggl(\frac{d^2}{dx^2}-\lambda^2\biggr)^3\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\,f(t)\,dt.$$

52. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{5/2} I_{3/2}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x)=\int_a^x g(t)\,dt,$$

где

$$g(t)=\frac{\pi}{128\lambda^4}\biggl(\frac{d^2}{dt^2}-\lambda^2\biggr)^6\int_a^t (t-\tau)^{5/2}\,I_{5/2}[\lambda(t-\tau)]\,f(\tau)\,d\tau.$$

53. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{\frac{2n-1}{2}} I_{\frac{2n-1}{2}}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x), \qquad n=2,3,\dots$

Решение:

$$y(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\,\lambda^{\frac{2n+1}{2}}(2n-2)!!}\biggl(\frac{d^2}{dx^2}-\lambda^2\biggr)^n\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\,f(t)\,dt.$$

54. $\displaystyle\int_a^x [I_\nu(\lambda x) - I_\nu(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = I_\nu(\lambda x)$.

55. $\displaystyle\int_a^x [AI_\nu(\lambda x) + BI_\nu(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\,\frac{d}{dx}\left\{\bigl[I_\nu(\lambda x)\bigr]^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x \bigl[I_\nu(\lambda t)\bigr]^{-\frac{B}{A+B}} f_t'(t)\,dt\right\}.$$

56. $\displaystyle\int_a^x [AI_\nu(\lambda x) + BI_\mu(\beta t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = AI_\nu(\lambda x)$, $h(t) = BI_\mu(\beta t)$.

57. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^\nu I_\nu[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = A\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\nu-1}\, I_{n-\nu-1}[\lambda(x-t)]\, f(t)\,dt,$$

$$A = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n-1} \frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(n-\nu)}{\Gamma(2\nu+1)\,\Gamma(2n-2\nu-1)},$$

где $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{n-1}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f_x'(a) = \cdots = f_x^{(n-1)}(a) = 0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$y(x) = A\int_a^x (x-t)^{n-\nu-1}\, I_{n-\nu-1}[\lambda(x-t)]F(t)\,dt, \qquad F(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2\right)^n f(t).$$

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987).

58. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{\nu+1} I_\nu[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t)\,dt,$$

где

$$g(t) = A\left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\nu-2}\, I_{n-\nu-2}[\lambda(t-\tau)]\, f(\tau)\,d\tau,$$

$$A = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n-2} \frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(n-\nu-1)}{\Gamma(2\nu+2)\,\Gamma(2n-2\nu-3)},$$

где $-1 < \nu < \frac{n}{2} - 1$, $n = 1, 2, \ldots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f_x'(a) = \cdots = f_x^{(n-1)}(a) = 0$, то функцию $g(t)$, определяющую решение можно записать в виде

$$g(t) = A\int_a^t (t-\tau)^{n-\nu-2}\, I_{n-\nu-2}[\lambda(t-\tau)]F(\tau)\,d\tau, \qquad F(\tau) = \left(\frac{d^2}{d\tau^2} - \lambda^2\right)^n f(\tau).$$

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987).

59. $\displaystyle\int_a^x I_0\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{d^2}{dx^2}\int_a^x J_0\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)f(t)\,dt.$$

60. $\displaystyle\int_a^x \bigl[AI_\nu(\lambda\sqrt{x}) + BI_\nu(\lambda\sqrt{t})\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\bigl[I_\nu(\lambda\sqrt{x})\bigr]^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x \bigl[I_\nu(\lambda\sqrt{t})\bigr]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

61. $\displaystyle\int_a^x \bigl[AI_\nu(\lambda\sqrt{x}) + BI_\mu(\beta\sqrt{t})\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = AI_\nu(\lambda\sqrt{x})$, $h(t) = BI_\mu(\beta\sqrt{t})$.

62. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{x-t}\,I_1\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\lambda}\frac{d^3}{dx^3}\int_a^x J_0\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)f(t)\,dt.$$

63. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{1/4}I_{1/2}\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\,\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x \frac{\cos\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)}{\sqrt{x-t}}\,f(t)\,dt.$$

64. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{3/4}I_{3/2}\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi}\,\lambda^{3/2}}\frac{d^3}{dx^3}\int_a^x \frac{\cos\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)}{\sqrt{x-t}}\,f(t)\,dt.$$

65. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{n/2}I_n\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Решение:

$$y(x) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^n\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\int_a^x J_0\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)f(t)\,dt,$$

66. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{\frac{2n-3}{4}}I_{\frac{2n-3}{2}}\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\frac{2n-3}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x \frac{\cos\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)}{\sqrt{x-t}}\,f(t)\,dt,$$

67. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{-1/4}I_{-1/2}\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\,\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\cos\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)}{\sqrt{x-t}}\,f(t)\,dt.$$

68. $\displaystyle\int_a^x (x-t)^{\nu/2} I_\nu\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n-2}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{\frac{n-\nu-2}{2}} J_{n-\nu-2}\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)f(t)\,dt,$$

где $-1<\nu<n-1$, $n=1,2,\dots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a)=f'_x(a)=\dots=f_x^{(n-1)}(a)=0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$y(x) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n-2}\int_a^x (x-t)^{\frac{n-\nu-2}{2}} J_{n-\nu-2}\bigl(\lambda\sqrt{x-t}\bigr)f_t^{(n)}(t)\,dt.$$

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987).

69. $\displaystyle\int_0^x \bigl(x^2-t^2\bigr)^{-1/4} I_{-1/2}\bigl(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}\,\frac{d}{dx}\int_0^x t\,\frac{\cos\bigl(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\bigr)}{\sqrt{x^2-t^2}}f(t)\,dt.$$

70. $\displaystyle\int_x^\infty \bigl(t^2-x^2\bigr)^{-1/4} I_{-1/2}\bigl(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = -\sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}\,\frac{d}{dx}\int_x^\infty t\,\frac{\cos\bigl(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\bigr)}{\sqrt{t^2-x^2}}f(t)\,dt.$$

71. $\displaystyle\int_0^x \bigl(x^2-t^2\bigr)^{\nu/2} I_\nu\bigl(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\bigr)y(t)\,dt = f(x), \qquad -1<\nu<0.$

Решение:

$$y(x) = \lambda\frac{d}{dx}\int_0^x t\bigl(x^2-t^2\bigr)^{-(\nu+1)/2} J_{-\nu-1}\bigl(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\bigr)f(t)\,dt.$$

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987).

72. $\displaystyle\int_x^\infty (t^2-x^2)^{\nu/2} I_\nu\bigl(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\bigr)y(t)\,dt = f(x), \qquad -1<\nu<0.$

Решение:

$$y(x) = -\lambda\frac{d}{dx}\int_x^\infty t\,(t^2-x^2)^{-(\nu+1)/2} J_{-\nu-1}\bigl(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\bigr)f(t)\,dt.$$

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987).

73. $\displaystyle\int_a^x [At^k I_\nu(\lambda x) + Bx^s I_\mu(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x)=AI_\nu(\lambda x)$, $h_1(t)=t^k$, $g_2(x)=Bx^s$, $h_2(t)=I_\mu(\lambda t)$.

74. $\displaystyle\int_a^x [AI_\nu^2(\lambda x) + BI_\nu^2(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение при $B\neq -A$:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\,\frac{d}{dx}\left\{\bigl|I_\nu(\lambda x)\bigr|^{-\frac{2A}{A+B}}\int_a^x \bigl|I_\nu(\lambda t)\bigr|^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

75. $\displaystyle\int_a^x [AI_\nu^k(\lambda x) + BI_\mu^s(\beta t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = AI_\nu^k(\lambda x)$, $h(t) = BI_\mu^s(\beta t)$.

76. $\displaystyle\int_a^x [K_0(\lambda x) - K_0(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $y(x) = -\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f'_x(x)}{\lambda K_1(\lambda x)}\right].$

77. $\displaystyle\int_a^x [K_\nu(\lambda x) - K_\nu(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = K_\nu(\lambda x)$.

78. $\displaystyle\int_a^x [AK_\nu(\lambda x) + BK_\nu(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{1}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{\left[K_\nu(\lambda x)\right]^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x \left[K_\nu(\lambda t)\right]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t)\,dt\right\}.$$

79. $\displaystyle\int_a^x [At^k K_\nu(\lambda x) + Bx^s K_\mu(\lambda t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = AK_\nu(\lambda x)$, $h_1(t) = t^k$, $g_2(x) = Bx^s$, $h_2(t) = K_\mu(\lambda t)$.

80. $\displaystyle\int_a^x [AI_\nu(\lambda x)K_\mu(\beta t) + BI_\nu(\lambda t)K_\mu(\beta x)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = AI_\nu(\lambda x)$, $h_1(t) = K_\mu(\beta t)$, $g_2(x) = BK_\mu(\beta x)$, $h_2(t) = I_\nu(\lambda t)$.

1.8-3. Ядра уравнений содержат присоединенные функции Лежандра

81. $\displaystyle\int_a^x (x^2 - t^2)^{-\mu/2} P_\nu^\mu\Big(\frac{x}{t}\Big)y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < a < \infty.$

Здесь $P_\nu^\mu(x)$ — присоединенная функция Лежандра.

Решение:

$$y(x) = x^{n+\mu-1}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{1-\mu}\int_a^x (x^2 - t^2)^{\frac{n+\mu-2}{2}}\, t^{-n} P_\nu^{2-n-\mu}\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt\right],$$

где $\mu < 1$, $\nu \geqslant -\frac{1}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$

⊙ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 510).

82. $\displaystyle\int_a^x (x^2 - t^2)^{-\mu/2} P_\nu^\mu\Big(\frac{t}{x}\Big)y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < a < \infty.$

Здесь $P_\nu^\mu(x)$ — присоединенная функция Лежандра.

Решение:

$$y(x) = \frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x^2 - t^2)^{\frac{n+\mu-2}{2}}\, P_\nu^{2-n-\mu}\Big(\frac{x}{t}\Big) f(t)\,dt,$$

где $\mu < 1$, $\nu \geqslant -\frac{1}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$

⊙ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 510).

83. $\displaystyle\int_x^b (t^2-x^2)^{-\mu/2} P_\nu^\mu\Big(\frac{x}{t}\Big) y(t)\,dt = f(x), \qquad 0<b<\infty.$

Здесь $P_\nu^\mu(x)$ — присоединенная функция Лежандра.

Решение:

$$y(x) = (-1)^n x^{n+\mu-1}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{1-\mu}\int_x^b (t^2-x^2)^{\frac{n+\mu-2}{2}}\,t^{-n}P_\nu^{2-n-\mu}\Big(\frac{t}{x}\Big)f(t)\,dt\right],$$

где $\mu<1$, $\nu\geqslant -\frac{1}{2}$, $n=1,2,\ldots$

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 510).

84. $\displaystyle\int_x^b (t^2-x^2)^{-\mu/2} P_\nu^\mu\Big(\frac{t}{x}\Big) y(t)\,dt = f(x), \qquad 0<b<\infty.$

Здесь $P_\nu^\mu(x)$ — присоединенная функция Лежандра.

Решение:

$$y(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\int_x^b (t^2-x^2)^{\frac{n+\mu-2}{2}}\,P_\nu^{2-n-\mu}\Big(\frac{x}{t}\Big)f(t)\,dt,$$

где $\mu<1$, $\nu\geqslant -\frac{1}{2}$, $n=1,2,\ldots$

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 510).

1.8-4. Ядра уравнений содержат гипергеометрические функции

85. $\displaystyle\int_s^x (x-t)^{b-1}\Phi\big(a,b;\lambda(x-t)\big)y(t)\,dt = f(x).$

Здесь $\Phi(a,b;z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Решение:

$$y(x) = \frac{d^n}{dx^n}\int_s^x \frac{(x-t)^{n-b-1}}{\Gamma(b)\Gamma(n-b)}\Phi\big(-a,\,n-b;\,\lambda(x-t)\big)f(t)\,dt,$$

где $0<b<n$, $n=1,2,\ldots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(s)=f'_x(s)=\cdots=f_x^{(n-1)}(s)=0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$y(x) = \int_s^x \frac{(x-t)^{n-b-1}}{\Gamma(b)\Gamma(n-b)}\Phi\big(-a,\,n-b;\,\lambda(x-t)\big)f_t^{(n)}(t)\,dt.$$

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 530).

86. $\displaystyle\int_s^x (x-t)^{c-1}F\Big(a,b,c;\,1-\frac{x}{t}\Big)y(t)\,dt = f(x).$

Здесь $F(a,b,c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Решение:

$$y(x) = x^{-a}\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^a\int_s^x \frac{(x-t)^{n-c-1}}{\Gamma(c)\Gamma(n-c)}F\Big(-a,\,n-b,\,n-c;\,1-\frac{t}{x}\Big)f(t)\,dt\right\},$$

где $0<c<n$, $n=1,2,\ldots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(s)=f'_x(s)=\cdots=f_x^{(n-1)}(s)=0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$y(x) = \int_s^x \frac{(x-t)^{n-c-1}}{\Gamma(c)\Gamma(n-c)}F\Big(-a,\,-b,\,n-c;\,1-\frac{t}{x}\Big)f_t^{(n)}(t)\,dt.$$

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 508).

1.9. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции

1.9-1. Уравнения с вырожденным ядром $K(x,t)=g_1(x)h_1(t)+g_2(x)h_2(t)$

1. $\displaystyle\int_a^x g(x)h(t)y(t)\,dt = f(x).$

Решение: $\displaystyle y = \frac{1}{h(x)}\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{1}{g(x)h(x)}f'_x(x) - \frac{g'_x(x)}{g^2(x)h(x)}f(x).$

2. $\displaystyle\int_a^x [g(x)-g(t)]y(t)\,dt = f(x).$

Считается, что выполнены условия $f(a)=f'_x(a)=0$, $f'_x/g'_x \neq \text{const}$.

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{g'_x(x)}\right].$

3. $\displaystyle\int_a^x [g(x)-g(t)+b]y(t)\,dt = f(x).$

Дифференцируя по x, приходим к уравнению вида 2.9.2:

$$y(x) + \frac{1}{b}g'_x(x)\int_a^x y(t)\,dt = \frac{1}{b}f'_x(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{b}f'_x(x) - \frac{1}{b^2}g'_x(x)\int_a^x \exp\left[\frac{g(t)-g(x)}{b}\right]f'_t(t)\,dt.$$

4. $\displaystyle\int_a^x [Ag(x)+Bg(t)]y(t)\,dt = f(x).$

При $B=-A$ см. уравнение 1.9.2.

Решение при $B\neq -A$:

$$y(x) = \frac{\operatorname{sign} g(x)}{A+B}\frac{d}{dx}\left\{|g(x)|^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x |g(t)|^{-\frac{B}{A+B}}f'_t(t)\,dt\right\}.$$

5. $\displaystyle\int_a^x [Ag(x)+Bg(t)+C]y(t)\,dt = f(x).$

При $B=-A$ см. уравнение 1.9.3. Пусть $B\neq -A$ и $(A+B)g(x)+C>0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx}\left\{|(A+B)g(x)+C|^{-\frac{A}{A+B}}\int_a^x |(A+B)g(t)+C|^{-\frac{B}{A+B}}f'_t(t)\,dt\right\}.$$

6. $\displaystyle\int_a^x [g(x)+h(t)]y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\Phi(x)}{g(x)+h(x)}\int_a^x \frac{f'_t(t)\,dt}{\Phi(t)}\right], \qquad \Phi(x) = \exp\left[\int_a^x \frac{h'_t(t)\,dt}{g(t)+h(t)}\right].$$

7. $\displaystyle\int_a^x \big[g(x) + (x-t)h(x)\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = g(x) + xh(x)$, $h_1(t) = 1$, $g_2(x) = h(x)$, $h_2(t) = -t$.

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx}\left\{\Phi(x)\frac{h(x)}{g(x)}\int_a^x \left[\frac{f(t)}{h(t)}\right]_t' \frac{dt}{\Phi(t)}\right\}, \qquad \Phi(t) = \exp\left[-\int_a^x \frac{h(t)}{g(t)}\,dt\right].$$

8. $\displaystyle\int_a^x \big[g(t) + (x-t)h(t)\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = x$, $h_1(t) = h(t)$, $g_2(x) = 1$, $h_2(t) = g(t) - h(t)t$.

9. $\displaystyle\int_a^x \big[g(x) + (Ax^\lambda + Bt^\mu)h(x)\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = g(x) + Ax^\lambda h(x)$, $h_1(t) = 1$, $g_2(x) = h(x)$, $h_2(t) = Bt^\mu$.

10. $\displaystyle\int_a^x \big[g(t) + (Ax^\lambda + Bt^\mu)h(t)\big]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = h(t)$, $g_2(x) = 1$, $h_2(t) = g(t) + Bt^\mu h(t)$.

11. $\displaystyle\int_a^x [g(x)h(t) - h(x)g(t)]\,y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a) = f_x'(a) = 0.$

При $g = \mathrm{const}$ или $h = \mathrm{const}$ см. уравнение 1.9.2.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{h}\,\frac{d}{dx}\left[\frac{(f/h)_x'}{(g/h)_x'}\right], \qquad \text{где} \quad f = f(x), \quad g = g(x), \quad h = h(x).$$

Здесь $Af + Bg + Ch \not\equiv 0$, где A, B и C — некоторые постоянные.

12. $\displaystyle\int_a^x [Ag(x)h(t) + Bg(t)h(x)]\,y(t)\,dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.9.11.

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{1}{(A+B)h(x)}\,\frac{d}{dx}\left\{\left[\frac{h(x)}{g(x)}\right]^{\frac{A}{A+B}} \int_a^x \left[\frac{h(t)}{g(t)}\right]^{\frac{B}{A+B}} \frac{d}{dt}\left[\frac{f(t)}{h(t)}\right] dt\right\}.$$

13. $\displaystyle\int_a^x \big\{1 + [g(t) - g(x)]h(x)\big\}\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = 1 - g(x)h(x)$, $h_1(t) = 1$, $g_2(x) = h(x)$, $h_2(t) = g(t)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx}\left\{h(x)\Phi(x)\int_a^x \left[\frac{f(t)}{h(t)}\right]_t' \frac{dt}{\Phi(t)}\right\}, \qquad \Phi(x) = \exp\left[\int_a^x g_t'(t)h(t)\,dt\right].$$

14. $\displaystyle\int_a^x \big\{e^{-\lambda(x-t)} + \big[e^{\lambda x}g(t) - e^{\lambda t}g(x)\big]h(x)\big\}\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = e^{\lambda x}h(x)$, $h_1(t) = g(t)$, $g_2(x) = e^{-\lambda x} - g(x)h(x)$, $h_2(t) = e^{\lambda t}$.

15. $\displaystyle\int_a^x [g_1(x)h_1(t)+g_2(x)h_2(t)]y(t)\,dt=f(x).$

При $g_2/g_1=\text{const}$ или $h_2/h_1=\text{const}$ см. уравнение 1.9.1.

1°. Решение при $g_1(x)h_1(x)+g_2(x)h_2(x)\not\equiv 0$ и $f(x)\not\equiv \text{const}\,g_2(x)$:

$$y(x)=\frac{1}{h_1(x)}\frac{d}{dx}\left\{\frac{g_2(x)h_1(x)\Phi(x)}{g_1(x)h_1(x)+g_2(x)h_2(x)}\int_a^x\left[\frac{f(t)}{g_2(t)}\right]_t'\frac{dt}{\Phi(t)}\right\}, \tag{1}$$

где

$$\Phi(x)=\exp\left\{\int_a^x\left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)}\right]_t'\frac{g_2(t)h_1(t)\,dt}{g_1(t)h_1(t)+g_2(t)h_2(t)}\right\}. \tag{2}$$

Если $f(x)\equiv\text{const}\,g_2(x)$, то решение уравнения дается формулами (1) и (2), в которых индекс 1 заменяется индексом 2 и наоборот.

2°. Решение при $g_1(x)h_1(x)+g_2(x)h_2(x)\equiv 0$:

$$y(x)=\frac{1}{h_1}\frac{d}{dx}\left[\frac{(f/g_2)_x'}{(g_1/g_2)_x'}\right]=-\frac{1}{h_1}\frac{d}{dx}\left[\frac{(f/g_2)_x'}{(h_2/h_1)_x'}\right],$$

где $f=f(x)$, $g_2=g_2(x)$, $h_1=h_1(x)$, $h_2=h_2(x)$.

1.9-2. Уравнения с разностным ядром: $K(x,t)=K(x-t)$

16. $\displaystyle\int_a^x K(x-t)y(t)\,dt=f(x).$

1°. Пусть $K(0)=1$ и $f(a)=0$. Дифференцируя уравнение по x, приходим к уравнению Вольтерра второго рода

$$y(x)+\int_a^x K_x'(x-t)y(t)\,dt=f_x'(x).$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$y(x)=f_x'(x)+\int_a^x R(x-t)f_t'(t)\,dt. \tag{1}$$

Здесь резольвента $R(x)$ определяется через ядро исходного уравнения $K(x)$ по формуле

$$R(x)=\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p\tilde K(p)}-1\right],\qquad \tilde K(p)=\mathfrak{L}\big[K(x)\big],$$

где $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^{-1}$ — прямое и обратное преобразования Лапласа:

$$\tilde K(p)=\mathfrak{L}\big[K(x)\big]=\int_0^\infty e^{-px}K(x)\,dx,\qquad R(x)=\mathfrak{L}^{-1}\big[\tilde R(p)\big]=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{px}\tilde R(p)\,dp.$$

2°. Пусть $K(x)$ имеет интегрируемую степенную особенность при $x=0$. Обозначим через $w=w(x)$ решение вспомогательного более простого (чем исходное) уравнения при $a=0$ и постоянной правой части $f\equiv 1$:

$$\int_0^x K(x-t)w(t)\,dt=1. \tag{2}$$

Тогда решение исходного интегрального уравнения при произвольной правой части выражается через решение вспомогательного уравнения (2) по формуле

$$y(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x w(x-t)f(t)\,dt=f(a)w(x-a)+\int_a^x w(x-t)f_t'(t)\,dt.$$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = Ax^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Частный случай уравнения 1.9.19 при $\lambda = 0$.

1°. Решение при $n = 0$:

$$y(x) = \frac{A}{B}, \qquad B = \int_0^\infty K(z)\,dz.$$

2°. Решение при $n = 1$:

$$y(x) = \frac{A}{B}x + \frac{AC}{B^2}, \qquad B = \int_0^\infty K(z)\,dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z)\,dz.$$

3°. Решение при $n = 2$:

$$y_2(x) = \frac{A}{B}x^2 + 2\frac{AC}{B^2}x + 2\frac{AC^2}{B^3} - \frac{AD}{B^2},$$

$$B = \int_0^\infty K(z)\,dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z)\,dz, \quad D = \int_0^\infty z^2K(z)\,dz.$$

4°. Решение при $n = 3, 4, \ldots$ определяется по формулам

$$y_n(x) = A\left\{\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)}\right]\right\}_{\lambda=0}, \qquad B(\lambda) = \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z}\,dz.$$

18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = Ae^{\lambda x}.$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B}e^{\lambda x}, \qquad B = \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z}\,dz = \mathfrak{L}\{K(z), \lambda\}.$$

19. $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = Ax^n e^{\lambda x}, \qquad n = 1, 2, \ldots$

1°. Решение при $n = 1$:

$$y_1(x) = \frac{A}{B}xe^{\lambda x} + \frac{AC}{B^2}e^{\lambda x},$$

$$B = \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z}\,dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z)e^{-\lambda z}\,dz.$$

Коэффициенты B и C удобно вычислять, используя таблицы преобразований Лапласа, по формулам $B = \mathfrak{L}\{K(z), \lambda\}$, $C = \mathfrak{L}\{zK(z), \lambda\}$.

2°. Решение при $n = 2$:

$$y_2(x) = \frac{A}{B}x^2e^{\lambda x} + 2\frac{AC}{B^2}xe^{\lambda x} + \left(2\frac{AC^2}{B^3} - \frac{AD}{B^2}\right)e^{\lambda x},$$

$$B = \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z}\,dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z)e^{-\lambda z}\,dz, \quad D = \int_0^\infty z^2K(z)e^{-\lambda z}\,dz.$$

3°. Решение при $n = 3, 4, \ldots$:

$$y_n(x) = \frac{\partial}{\partial\lambda}y_{n-1}(x) = A\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)}\right], \qquad B(\lambda) = \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z}\,dz.$$

20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = A\,\mathrm{ch}(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{2B_-}e^{\lambda x} + \frac{A}{2B_+}e^{-\lambda x} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B_-} + \frac{A}{B_+}\right)\mathrm{ch}(\lambda x) + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B_-} - \frac{A}{B_+}\right)\mathrm{sh}(\lambda x),$$

$$B_- = \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z}\,dz, \quad B_+ = \int_0^\infty K(z)e^{\lambda z}\,dz.$$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{2B_-}e^{\lambda x} - \frac{A}{2B_+}e^{-\lambda x} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B_-} - \frac{A}{B_+}\right)\operatorname{ch}(\lambda x) + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B_-} + \frac{A}{B_+}\right)\operatorname{sh}(\lambda x),$$

$$B_- = \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z}\,dz, \quad B_+ = \int_0^\infty K(z)e^{\lambda z}\,dz.$$

22. $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = A\cos(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_\text{c}^2 + B_\text{s}^2}\bigl[B_\text{c}\cos(\lambda x) - B_\text{s}\sin(\lambda x)\bigr],$$

$$B_\text{c} = \int_0^\infty K(z)\cos(\lambda z)\,dz, \quad B_\text{s} = \int_0^\infty K(z)\sin(\lambda z)\,dz.$$

23. $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = A\sin(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_\text{c}^2 + B_\text{s}^2}\bigl[B_\text{c}\sin(\lambda x) + B_\text{s}\cos(\lambda x)\bigr],$$

$$B_\text{c} = \int_0^\infty K(z)\cos(\lambda z)\,dz, \quad B_\text{s} = \int_0^\infty K(z)\sin(\lambda z)\,dz.$$

24. $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = Ae^{\mu x}\cos(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_\text{c}^2 + B_\text{s}^2}e^{\mu x}\bigl[B_\text{c}\cos(\lambda x) - B_\text{s}\sin(\lambda x)\bigr],$$

$$B_\text{c} = \int_0^\infty K(z)e^{-\mu z}\cos(\lambda z)\,dz, \quad B_\text{s} = \int_0^\infty K(z)e^{-\mu z}\sin(\lambda z)\,dz.$$

25. $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = Ae^{\mu x}\sin(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_\text{c}^2 + B_\text{s}^2}e^{\mu x}\bigl[B_\text{c}\sin(\lambda x) + B_\text{s}\cos(\lambda x)\bigr],$$

$$B_\text{c} = \int_0^\infty K(z)e^{-\mu z}\cos(\lambda z)\,dz, \quad B_\text{s} = \int_0^\infty K(z)e^{-\mu z}\sin(\lambda z)\,dz.$$

26. $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = f(x).$

1°. Для полиномиальной правой части уравнения $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Решение также можно получить по формуле, приведенной в 1.9.17 (см. п. 4°).

2°. Для правой части $f(x) = e^{\lambda x} \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n} B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Решение также можно получить по формуле, приведенной в 1.9.19 (см. п. 3°).

3°. Для правой части $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{B_k} \exp(\lambda_k x), \qquad B_k = \int_0^\infty K(z) \exp(-\lambda_k z)\, dz.$$

4°. Для правой части $f(x) = \cos(\lambda x) \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $f(x) = \sin(\lambda x) \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{B_{\mathrm{c}k}^2 + B_{\mathrm{s}k}^2} \bigl[B_{\mathrm{c}k} \cos(\lambda_k x) - B_{\mathrm{s}k} \sin(\lambda_k x)\bigr],$$

$$B_{\mathrm{c}k} = \int_0^\infty K(z) \cos(\lambda_k z)\, dz, \quad B_{\mathrm{s}k} = \int_0^\infty K(z) \sin(\lambda_k z)\, dz.$$

7°. Для правой части $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{B_{\mathrm{c}k}^2 + B_{\mathrm{s}k}^2} \bigl[B_{\mathrm{c}k} \sin(\lambda_k x) + B_{\mathrm{s}k} \cos(\lambda_k x)\bigr],$$

$$B_{\mathrm{c}k} = \int_0^\infty K(z) \cos(\lambda_k z)\, dz, \quad B_{\mathrm{s}k} = \int_0^\infty K(z) \sin(\lambda_k z)\, dz.$$

27. $\displaystyle\int_x^\infty K(x-t) y(t)\, dt = A x^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Частный случай уравнения 1.9.29 при $\lambda = 0$.

1°. Решение при $n = 0$:

$$y(x) = \frac{A}{B}, \qquad B = \int_0^\infty K(-z)\, dz.$$

2°. Решение при $n = 1$:

$$y(x) = \frac{A}{B} x - \frac{AC}{B^2}, \qquad B = \int_0^\infty K(-z)\, dz, \quad C = \int_0^\infty z K(-z)\, dz.$$

3°. Решение при $n=2$:

$$y_2(x)=\frac{A}{B}x^2-2\frac{AC}{B^2}x+2\frac{AC^2}{B^3}-\frac{AD}{B^2},$$
$$B=\int_0^\infty K(-z)\,dz,\quad C=\int_0^\infty zK(-z)\,dz,\quad D=\int_0^\infty z^2K(-z)\,dz.$$

4°. Решение при $n=3,4,\ldots$ определяется по формулам

$$y_n(x)=A\left\{\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)}\right]\right\}_{\lambda=0},\qquad B(\lambda)=\int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z}\,dz.$$

28. $\displaystyle\int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt=Ae^{\lambda x}.$

Решение:

$$y(x)=\frac{A}{B}e^{\lambda x},\qquad B=\int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z}\,dz.$$

Выражение для коэффициента B представляет собой преобразование Лапласа с параметром $p=-\lambda$ от функции $K(-z)$ и может вычисляться с помощью таблиц преобразований Лапласа, приведенных, например, в книгах: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1965, 1974).

29. $\displaystyle\int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt=Ax^ne^{\lambda x},\qquad n=1,2,\ldots$

1°. Решение при $n=1$:

$$y_1(x)=\frac{A}{B}xe^{\lambda x}-\frac{AC}{B^2}e^{\lambda x},$$
$$B=\int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z}\,dz,\quad C=\int_0^\infty zK(-z)e^{\lambda z}\,dz.$$

Коэффициенты B и C удобно вычислять, используя таблицы преобразований Лапласа с параметром $p=-\lambda$.

2°. Решение при $n=2$:

$$y_2(x)=\frac{A}{B}x^2e^{\lambda x}-2\frac{AC}{B^2}xe^{\lambda x}+\left(2\frac{AC^2}{B^3}-\frac{AD}{B^2}\right)e^{\lambda x},$$
$$B=\int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z}\,dz,\quad C=\int_0^\infty zK(-z)e^{\lambda z}\,dz,\quad D=\int_0^\infty z^2K(-z)e^{\lambda z}\,dz.$$

3°. Решение при $n=3,4,\ldots$ определяется по формулам

$$y_n(x)=\frac{\partial}{\partial\lambda}y_{n-1}(x)=A\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)}\right],\qquad B(\lambda)=\int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z}\,dz.$$

30. $\displaystyle\int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt=A\operatorname{ch}(\lambda x).$

Решение:

$$y(x)=\frac{A}{2B_+}e^{\lambda x}+\frac{A}{2B_-}e^{-\lambda x}=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{B_+}+\frac{A}{B_-}\right)\operatorname{ch}(\lambda x)+\frac{1}{2}\left(\frac{A}{B_+}-\frac{A}{B_-}\right)\operatorname{sh}(\lambda x),$$
$$B_+=\int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z}\,dz,\quad B_-=\int_0^\infty K(-z)e^{-\lambda z}\,dz.$$

31. $\displaystyle\int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{2B_+}e^{\lambda x} - \frac{A}{2B_-}e^{-\lambda x} = \frac{1}{2}\Bigl(\frac{A}{B_+} - \frac{A}{B_-}\Bigr)\operatorname{ch}(\lambda x) + \frac{1}{2}\Bigl(\frac{A}{B_+} + \frac{A}{B_-}\Bigr)\operatorname{sh}(\lambda x),$$

$$B_+ = \int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z}\,dz, \quad B_- = \int_0^\infty K(-z)e^{-\lambda z}\,dz.$$

32. $\displaystyle\int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = A\cos(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_\text{c}^2 + B_\text{s}^2}\bigl[B_\text{c}\cos(\lambda x) + B_\text{s}\sin(\lambda x)\bigr],$$

$$B_\text{c} = \int_0^\infty K(-z)\cos(\lambda z)\,dz, \quad B_\text{s} = \int_0^\infty K(-z)\sin(\lambda z)\,dz.$$

33. $\displaystyle\int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = A\sin(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_\text{c}^2 + B_\text{s}^2}\bigl[B_\text{c}\sin(\lambda x) - B_\text{s}\cos(\lambda x)\bigr],$$

$$B_\text{c} = \int_0^\infty K(-z)\cos(\lambda z)\,dz, \quad B_\text{s} = \int_0^\infty K(-z)\sin(\lambda z)\,dz.$$

34. $\displaystyle\int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = Ae^{\mu x}\cos(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_\text{c}^2 + B_\text{s}^2}e^{\mu x}\bigl[B_\text{c}\cos(\lambda x) + B_\text{s}\sin(\lambda x)\bigr],$$

$$B_\text{c} = \int_0^\infty K(-z)e^{\mu z}\cos(\lambda z)\,dz, \quad B_\text{s} = \int_0^\infty K(-z)e^{\mu z}\sin(\lambda z)\,dz.$$

35. $\displaystyle\int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = Ae^{\mu x}\sin(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_\text{c}^2 + B_\text{s}^2}e^{\mu x}\bigl[B_\text{c}\sin(\lambda x) - B_\text{s}\cos(\lambda x)\bigr],$$

$$B_\text{c} = \int_0^\infty K(-z)e^{\mu z}\cos(\lambda z)\,dz, \quad B_\text{s} = \int_0^\infty K(-z)e^{\mu z}\sin(\lambda z)\,dz.$$

36. $\displaystyle\int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = f(x).$

1°. Для полиномиальной правой части уравнения $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Решение также можно получить по формуле, приведенной в 1.9.27 (см. п. 4°).

2°. Для правой части $f(x)=e^{\lambda x}\sum\limits_{k=0}^{n}A_kx^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n}B_kx^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Решение также можно получить по формуле, приведенной в 1.9.29 (см. п. 3°).

3°. Для правой части $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}A_k\exp(\lambda_kx)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{B_k}\exp(\lambda_kx),\qquad B_k=\int_0^\infty K(-z)\exp(\lambda_kz)\,dz.$$

4°. Для правой части $f(x)=\cos(\lambda x)\sum\limits_{k=0}^{n}A_kx^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\cos(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}B_kx^k+\sin(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}C_kx^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $f(x)=\sin(\lambda x)\sum\limits_{k=0}^{n}A_kx^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\cos(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}B_kx^k+\sin(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}C_kx^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}A_k\cos(\lambda_kx)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{B_{\mathrm{c}k}^2+B_{\mathrm{s}k}^2}\bigl[B_{\mathrm{c}k}\cos(\lambda_kx)+B_{\mathrm{s}k}\sin(\lambda_kx)\bigr],$$
$$B_{\mathrm{c}k}=\int_0^\infty K(-z)\cos(\lambda_kz)\,dz,\quad B_{\mathrm{s}k}=\int_0^\infty K(-z)\sin(\lambda_kz)\,dz.$$

7°. Для правой части $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}A_k\sin(\lambda_kx)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{B_{\mathrm{c}k}^2+B_{\mathrm{s}k}^2}\bigl[B_{\mathrm{c}k}\sin(\lambda_kx)-B_{\mathrm{s}k}\cos(\lambda_kx)\bigr],$$
$$B_{\mathrm{c}k}=\int_0^\infty K(-z)\cos(\lambda_kz)\,dz,\quad B_{\mathrm{s}k}=\int_0^\infty K(-z)\sin(\lambda_kz)\,dz.$$

8°. Для произвольной правой части $f=f(x)$ решение интегрального уравнения можно определять по формуле

$$y(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\tilde f(p)}{\tilde k(-p)}e^{px}\,dp,$$
$$\tilde f(p)=\int_0^\infty f(x)e^{-px}\,dx,\qquad \tilde k(-p)=\int_0^\infty K(-z)e^{pz}\,dz.$$

Для вычисления $\tilde f(p)$, $\tilde k(-p)$ удобно использовать таблицы преобразований Лапласа, а для определения $y(x)$ — таблицы обратных преобразований Лапласа.

1.9-3. Другие уравнения

37. $\displaystyle\int_a^x \bigl[g(x)-g(t)\bigr]^n y(t)\,dt = f(x), \qquad n=1,2,\dots$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям: $f(a)=f'_x(a)=\dots=f_x^{(n)}(a)=0$.

Решение: $\displaystyle y(x)=\frac{1}{n!}g'_x(x)\left(\frac{1}{g'_x(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x)$.

38. $\displaystyle\int_a^x \sqrt{g(x)-g(t)}\,y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a)=0.$

Решение:
$$y(x)=\frac{2}{\pi}g'_x(x)\left(\frac{1}{g'_x(x)}\frac{d}{dx}\right)^{2}\int_a^x \frac{f(t)g'_t(t)\,dt}{\sqrt{g(x)-g(t)}}.$$

39. $\displaystyle\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{g(x)-g(t)}} = f(x), \qquad g'_x>0.$

Решение:
$$y(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)g'_t(t)\,dt}{\sqrt{g(x)-g(t)}}.$$

40. $\displaystyle\int_a^x \frac{e^{\lambda(x-t)}y(t)\,dt}{\sqrt{g(x)-g(t)}} = f(x), \qquad g'_x>0.$

Решение:
$$y(x)=\frac{1}{\pi}e^{\lambda x}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{e^{-\lambda t}f(t)g'_t(t)}{\sqrt{g(x)-g(t)}}\,dt.$$

41. $\displaystyle\int_a^x [g(x)-g(t)]^{\lambda} y(t)\,dt = f(x), \qquad f(a)=0, \quad 0<\lambda<1.$

Решение:
$$y(x)=kg'_x(x)\left(\frac{1}{g'_x(x)}\frac{d}{dx}\right)^{2}\int_a^x \frac{g'_t(t)f(t)\,dt}{[g(x)-g(t)]^{\lambda}}, \qquad k=\frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

42. $\displaystyle\int_a^x \frac{h(t)y(t)\,dt}{[g(x)-g(t)]^{\lambda}} = f(x), \qquad g'_x>0, \quad 0<\lambda<1.$

Решение:
$$y(x)=\frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi h(x)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)g'_t(t)\,dt}{[g(x)-g(t)]^{1-\lambda}}.$$

43. $\displaystyle\int_0^x K\left(\frac{t}{x}\right)y(t)\,dt = Ax^{\lambda}+Bx^{\mu}.$

Решение:
$$y(x)=\frac{A}{I_\lambda}x^{\lambda-1}+\frac{B}{I_\mu}x^{\mu-1}, \qquad I_\lambda=\int_0^1 K(z)z^{\lambda-1}\,dz, \quad I_\mu=\int_0^1 K(z)z^{\mu-1}\,dz.$$

44. $\displaystyle\int_0^x K\Big(\frac{t}{x}\Big)y(t)\,dt = P_n(x), \qquad P_n(x) = x^\lambda \sum_{m=0}^{n} A_m x^m.$

Решение:

$$y(x) = x^\lambda \sum_{m=0}^{n} \frac{A_m}{I_m} x^{m-1}, \qquad I_m = \int_0^1 K(z) z^{\lambda+m-1}\,dz.$$

Предполагается, что существует интеграл I_0.

45. $\displaystyle\int_a^x \big\{g_1(x)\big[h_1(t)-h_1(x)\big] + g_2(x)\big[h_2(t)-h_2(x)\big]\big\}y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.50 при $g_3(x) = -g_1(x)h_1(x) - g_2(x)h_2(x)$, $h_3(t) = 1$.

Замена $Y(x) = \int_a^x y(t)\,dt$ с последующим интегрированием по частям приводит к интегральному уравнению вида 1.9.15:

$$\int_a^x \Big\{g_1(x)\big[h_1(t)\big]'_t + g_2(x)\big[h_2(t)\big]'_t\Big\}Y(t)\,dt = -f(x).$$

46. $\displaystyle\int_a^x \big\{g_1(x)\big[h_1(t) - e^{\lambda(x-t)}h_1(x)\big] +$

$\displaystyle + g_2(x)\big[h_2(t) - e^{\lambda(x-t)}h_2(x)\big]\big\}y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.50 при $g_3(x) = -e^{\lambda x}\big[g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x)\big]$, $h_3(t) = e^{-\lambda t}$.

Замена $Y(x) = \int_a^x e^{-\lambda t}y(t)\,dt$ с последующим интегрированием по частям приводит к интегральному уравнению вида 1.9.15:

$$\int_a^x \Big\{g_1(x)\big[e^{\lambda t}h_1(t)\big]'_t + g_2(x)\big[e^{\lambda t}h_2(t)\big]'_t\Big\}Y(t)\,dt = -f(x).$$

47. $\displaystyle\int_a^x \big[Ag^\lambda(x)g^\mu(t) + Bg^{\lambda+\beta}(x)g^{\mu-\beta}(t) -$

$\displaystyle - (A+B)g^{\lambda+\gamma}(x)g^{\mu-\gamma}(t)\big]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.50 при $g_1(x) = Ag^\lambda(x)$, $h_1(t) = g^\mu(t)$, $g_2(x) = Bg^{\lambda+\beta}(x)$, $h_2(t) = g^{\mu-\beta}(t)$, $g_3(x) = -(A+B)g^{\lambda+\gamma}(x)$, $h_3(t) = g^{\mu-\gamma}(t)$.

48. $\displaystyle\int_a^x \big[Ag^\lambda(x)h(x)g^\mu(t) + Bg^{\lambda+\beta}(x)h(x)g^{\mu-\beta}(t) -$

$\displaystyle - (A+B)g^{\lambda+\gamma}(x)g^{\mu-\gamma}(t)h(t)\big]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.50 при $g_1(x) = Ag^\lambda(x)h(x)$, $h_1(t) = g^\mu(t)$, $g_2(x) = Bg^{\lambda+\beta}(x)h(x)$, $h_2(t) = g^{\mu-\beta}(t)$, $g_3(x) = -(A+B)g^{\lambda+\gamma}(x)$, $h_3(t) = g^{\mu-\gamma}(t)h(t)$.

49. $\displaystyle\int_a^x \big[Ag^\lambda(x)h(x)g^\mu(t) + Bg^{\lambda+\beta}(x)h(t)g^{\mu-\beta}(t) -$

$\displaystyle - (A+B)g^{\lambda+\gamma}(x)g^{\mu-\gamma}(t)h(t)\big]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.50 при $g_1(x) = Ag^\lambda(x)h(x)$, $h_1(t) = g^\mu(t)$, $g_2(x) = Bg^{\lambda+\beta}(x)$, $h_2(t) = g^{\mu-\beta}(t)h(t)$, $g_3(x) = -(A+B)g^{\lambda+\gamma}(x)$, $h_3(t) = g^{\mu-\gamma}(t)h(t)$.

50. $\displaystyle\int_a^x \bigl[g_1(x)h_1(t)+g_2(x)h_2(t)+g_3(x)h_3(t)\bigr]y(t)\,dt=f(x),$

$$\text{где}\quad g_1(x)h_1(x)+g_2(x)h_2(x)+g_3(x)h_3(x)\equiv 0.$$

Замена $Y(x)=\displaystyle\int_a^x h_3(t)y(t)\,dt$ с последующим интегрированием по частям приводит к интегральному уравнению вида 1.9.15:

$$\int_a^x \biggl\{g_1(x)\biggl[\frac{h_1(t)}{h_3(t)}\biggr]'_t+g_2(x)\biggl[\frac{h_2(t)}{h_3(t)}\biggr]'_t\biggr\}Y(t)\,dt=-f(x).$$

51. $\displaystyle\int_{-\infty}^x Q(x-t)e^{\alpha t}y(\xi)\,dt=Ae^{px},\qquad \xi=e^{\beta t}g(x-t).$

Решение:

$$y(\xi)=\frac{A}{q}\xi^{\frac{p-\alpha}{\beta}},\qquad q=\int_0^\infty Q(z)[g(z)]^{\frac{p-\alpha}{\beta}}e^{-pz}\,dz.$$

1.10. Некоторые формулы и преобразования

1. Пусть решение интегрального уравнения

$$\int_a^x K(x,t)y(t)\,dt=f(x) \tag{1}$$

имеет вид

$$y(x)=\mathcal{F}\bigl[f(x)\bigr],$$

где $\mathcal{F}$ — некоторый линейный оператор (который образован с помощью операций интегрирования и дифференцирования). Тогда решение более сложного интегрального уравнения

$$\int_a^x K(x,t)g(x)h(t)y(t)\,dt=f(x) \tag{2}$$

дается формулой

$$y(x)=\frac{1}{h(x)}\mathcal{F}\biggl[\frac{f(x)}{g(x)}\biggr].$$

2. Пусть решение интегрального уравнения (1) имеет вид

$$y(x)=L_1\Bigl(x,\,\frac{d}{dx}\Bigr)f(x)+L_2\Bigl(x,\,\frac{d}{dx}\Bigr)\int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

где L_1 и L_2 — некоторые линейные дифференциальные операторы.

Тогда решение более сложного интегрального уравнения

$$\int_a^x K\bigl(\varphi(x),\,\varphi(t)\bigr)y(t)\,dt=f(x), \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная монотонная (дифференцируемая достаточное число раз, $\varphi'_x>0$) функция определяется по формуле

$$y(x)=\varphi'_x(x)L_1\biggl(\varphi(x),\,\frac{1}{\varphi'_x(x)}\frac{d}{dx}\biggr)f(x)+$$
$$+\varphi'_x(x)L_2\biggl(\varphi(x),\,\frac{1}{\varphi'_x(x)}\frac{d}{dx}\biggr)\int_a^x R\bigl(\varphi(x),\,\varphi(t)\bigr)\varphi'_t(t)f(t)\,dt.$$

2. Линейные уравнения второго рода с переменным пределом интегрирования

► ***Обозначения:*** *$f = f(x)$, $g = g(x)$, $h = h(x)$, $K = K(x)$, $M = M(x)$ — произвольные функции (вместо x у функций может быть сложный аргумент, зависящий от двух переменных x и t); A, B, C, D, E, a, b, c, α, β, γ, λ, μ — свободные параметры; m, n — целые неотрицательные числа.*

2.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции

2.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t

1. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^x y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:
$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f(t)\,dt.$$

2. $\boldsymbol{y(x) + \lambda x \int_a^x y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:
$$y(x) = f(x) - \lambda \int_a^x x \exp\left[\tfrac{1}{2}\lambda(t^2 - x^2)\right] f(t)\,dt.$$

3. $\boldsymbol{y(x) + \lambda \int_a^x t y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:
$$y(x) = f(x) - \lambda \int_a^x t \exp\left[\tfrac{1}{2}\lambda(t^2 - x^2)\right] f(t)\,dt.$$

4. $\boldsymbol{y(x) + \lambda \int_a^x (x - t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.1.34 при $n = 1$.

1°. Решение при $\lambda > 0$:
$$y(x) = f(x) - k \int_a^x \sin[k(x-t)] f(t)\,dt, \qquad k = \sqrt{\lambda}.$$

2°. Решение при $\lambda < 0$:
$$y(x) = f(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)] f(t)\,dt, \qquad k = \sqrt{-\lambda}.$$

5. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \left[A + B(x - t)\right] y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Решение при $A^2 > 4B$:
$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t) f(t)\,dt,$$
$$R(x) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}Ax\right)\left[A \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{2B - A^2}{2\beta} \operatorname{sh}(\beta x)\right], \quad \beta = \sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 - B}.$$

2°. Решение при $A^2 < 4B$:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt,$$

$$R(x) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}Ax\bigr)\left[A\cos(\beta x) + \frac{2B - A^2}{2\beta}\sin(\beta x)\right], \quad \beta = \sqrt{B - \tfrac{1}{4}A^2}.$$

3°. Решение при $A^2 = 4B$:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt, \qquad R(x) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}Ax\bigr)\bigl(A - \tfrac{1}{4}A^2 x\bigr).$$

6. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x (Ax + Bt + C)\, y(t)\, dt = f(x).}$

При $B = -A$ см. уравнение 2.1.5. Частный случай уравнения 2.9.6 при $g(x) = -Ax$, $h(t) = -Bt - C$.

Исходное интегральное уравнение путем дифференцирования с последующей заменой $Y(x) = \int_a^x y(t)\, dt$ сводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$Y''_{xx} - \bigl[(A+B)x + C\bigr]Y'_x - AY = f'_x(x) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$Y(a) = 0, \quad Y'_x(a) = f(a). \tag{2}$$

Фундаментальная система решений однородного уравнения (1) при $f \equiv 0$ имеет вид

$$Y_1(x) = \Phi\bigl(\alpha,\, \tfrac{1}{2};\, kz^2\bigr), \qquad Y_2(x) = \Psi\bigl(\alpha,\, \tfrac{1}{2};\, kz^2\bigr),$$

$$\alpha = \frac{A}{2(A+B)}, \quad k = \frac{A+B}{2}, \quad z = x + \frac{C}{A+B},$$

где $\Phi(\alpha, \beta; x)$ и $\Psi(\alpha, \beta; x)$ — вырожденные гипергеометрические функции.

Решение неоднородного уравнения (1) с граничными условиями (2) для произвольной функции $f = f(x)$ с учетом равенства $y(x) = Y'_x(x)$ приводит к решению интегрального уравнения в виде

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x,t) f(t)\, dt,$$

$$R(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left[\frac{Y_1(x)Y_2(t) - Y_2(x)Y_1(t)}{W(t)}\right], \quad W(t) = \frac{2\sqrt{\pi k}}{\Gamma(\alpha)} \exp\left[k\Bigl(t + \frac{C}{A+B}\Bigr)^2\right].$$

2.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t

7. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x x^2 y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.1.50 при $\lambda = 2$, $\mu = 0$.

Решение:

$$y(x) = f(x) - A\int_a^x x^2 \exp\bigl[\tfrac{1}{3}A(t^3 - x^3)\bigr] f(t)\, dt.$$

8. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x xt\, y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.1.50 при $\lambda = 1$, $\mu = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) - A\int_a^x xt \exp\bigl[\tfrac{1}{3}A(t^3 - x^3)\bigr] f(t)\, dt.$$

9. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x t^2 y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.1.50 при $\lambda = 0$, $\mu = 2$.
Решение:

$$y(x) = f(x) - A\int_a^x t^2 \exp\bigl[\tfrac{1}{3}A(t^3 - x^3)\bigr] f(t)\,dt.$$

10. $\boldsymbol{y(x) + \lambda\int_a^x (x-t)^2 y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.1.34 при $n = 2$.
Решение:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t) f(t)\,dt,$$

$$R(x) = \tfrac{2}{3}ke^{-2kx} - \tfrac{2}{3}ke^{kx}\Bigl[\cos\bigl(\sqrt{3}\,kx\bigr) - \sqrt{3}\sin\bigl(\sqrt{3}\,kx\bigr)\Bigr], \qquad k = \bigl(\tfrac{1}{4}\lambda\bigr)^{1/3}.$$

11. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x^2 - t^2) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.5 при $g(x) = Ax^2$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W}\int_a^x \bigl[u_1'(x)u_2'(t) - u_2'(x)u_1'(t)\bigr] f(t)\,dt,$$

где штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках, $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + 2Axu = 0$, причем функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака параметра A.

При $A > 0$ имеем

$$W = 3/\pi, \quad u_1(x) = \sqrt{x}\,J_{1/3}\Bigl(\sqrt{\tfrac{8}{9}A}\,x^{3/2}\Bigr), \quad u_2(x) = \sqrt{x}\,Y_{1/3}\Bigl(\sqrt{\tfrac{8}{9}A}\,x^{3/2}\Bigr).$$

При $A < 0$ имеем

$$W = -\tfrac{3}{2}, \quad u_1(x) = \sqrt{x}\,I_{1/3}\Bigl(\sqrt{\tfrac{8}{9}|A|}\,x^{3/2}\Bigr), \quad u_2(x) = \sqrt{x}\,K_{1/3}\Bigl(\sqrt{\tfrac{8}{9}|A|}\,x^{3/2}\Bigr).$$

12. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (xt - t^2) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.4 при $g(t) = At$. Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A}{W}\int_a^x t\bigl[y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)\bigr] f(t)\,dt,$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $y''_{xx} + Axy = 0$, причем функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака параметра A.

При $A > 0$ имеем

$$W = 3/\pi, \quad y_1(x) = \sqrt{x}\,J_{1/3}\bigl(\tfrac{2}{3}\sqrt{A}\,x^{3/2}\bigr), \quad y_2(x) = \sqrt{x}\,Y_{1/3}\bigl(\tfrac{2}{3}\sqrt{A}\,x^{3/2}\bigr).$$

При $A < 0$ имеем

$$W = -\tfrac{3}{2}, \quad y_1(x) = \sqrt{x}\,I_{1/3}\bigl(\tfrac{2}{3}\sqrt{|A|}\,x^{3/2}\bigr), \quad y_2(x) = \sqrt{x}\,K_{1/3}\bigl(\tfrac{2}{3}\sqrt{|A|}\,x^{3/2}\bigr).$$

13. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x^2 - xt)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.3 при $g(x) = Ax$. Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A}{W}\int_a^x x\big[y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)\big]f(t)\,dt,$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $y''_{xx} + Axy = 0$, причем функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака параметра A.

При $A > 0$ имеем

$$W = 3/\pi, \quad y_1(x) = \sqrt{x}\,J_{1/3}\big(\tfrac{2}{3}\sqrt{A}\,x^{3/2}\big), \quad y_2(x) = \sqrt{x}\,Y_{1/3}\big(\tfrac{2}{3}\sqrt{A}\,x^{3/2}\big).$$

При $A < 0$ имеем

$$W = -\tfrac{3}{2}, \quad y_1(x) = \sqrt{x}\,I_{1/3}\big(\tfrac{2}{3}\sqrt{|A|}\,x^{3/2}\big), \quad y_2(x) = \sqrt{x}\,K_{1/3}\big(\tfrac{2}{3}\sqrt{|A|}\,x^{3/2}\big).$$

14. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (t^2 - 3x^2)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.1.55 при $\lambda = 1$, $\mu = 2$.

15. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (2xt - 3x^2)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.1.55 при $\lambda = 2$, $\mu = 1$.

16. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x (ABxt - ABx^2 + Ax + B)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $g(x) = Ax$, $h(x) = B$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = (Ax+B)\exp\big[\tfrac{1}{2}A(x^2 - t^2)\big] + B^2\int_t^x \exp\big[\tfrac{1}{2}A(s^2 - t^2) + B(x - s)\big]\,ds.$$

17. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \big(Ax^2 - At^2 + Bx - Ct + D\big)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.6 при $g(x) = Ax^2 + Bx + D$, $h(t) = -At^2 - Ct$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left[\frac{Y_1(x)Y_2(t) - Y_2(x)Y_1(t)}{W(t)}\right]f(t)\,dt.$$

Здесь $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ — фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения второго порядка $Y''_{xx} + \big[(B-C)x + D\big]Y'_x + (2Ax+B)Y = 0$ (об этом уравнении см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 1995):

$$Y_1(x) = \exp(-kx)\Phi\big(\alpha,\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2}(C-B)z^2\big), \quad Y_2(x) = \exp(-kx)\Psi\big(\alpha,\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2}(C-B)z^2\big),$$

$$W(x) = -\frac{\sqrt{2\pi(C-B)}}{\Gamma(\alpha)}\exp\big[\tfrac{1}{2}(C-B)z^2 - 2kx\big], \quad k = \frac{2A}{B-C},$$

$$\alpha = -\frac{4A^2 + 2AD(C-B) + B(C-B)^2}{2(C-B)^3}, \quad z = x - \frac{4A + (C-B)D}{(C-B)^2},$$

где $\Phi\big(\alpha,\beta;x\big)$ и $\Psi\big(\alpha,\beta;x\big)$ — вырожденные гипергеометрические функции, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

18. $y(x) - \int_a^x \big[Ax + B + (Cx + D)(x - t)\big] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.11 при $g(x) = Ax + B$, $h(x) = Cx + D$.

Решение при $A \neq 0$:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \big[Y_2''(x)Y_1(t) - Y_1''(x)Y_2(t)\big] \frac{f(t)}{W(t)}\, dt.$$

Здесь $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ — фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения второго порядка $Y_{xx}'' - (Ax + B)Y_x' - (Cx + D)Y = 0$ (об этом уравнении см. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, 1995):

$$Y_1(x) = \exp(-kx)\Phi\big(\alpha,\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2}Az^2\big), \quad Y_2(x) = \exp(-kx)\Psi\big(\alpha,\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2}Az^2\big),$$
$$W(x) = -\sqrt{2\pi A}\,\big[\Gamma(\alpha)\big]^{-1} \exp\big(\tfrac{1}{2}Az^2 - 2kx\big), \quad k = C/A,$$
$$\alpha = \tfrac{1}{2}(A^2D - ABC - C^2)A^{-3}, \quad z = x + (AB + 2C)A^{-2},$$

где $\Phi\big(\alpha, \beta; x\big)$ и $\Psi\big(\alpha, \beta; x\big)$ — вырожденные гипергеометрические функции, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

19. $y(x) + \int_a^x \big[At + B + (Ct + D)(t - x)\big] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.12 при $g(t) = -At - B$, $h(t) = -Ct - D$.

Решение при $A \neq 0$:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x \big[Y_1(x)Y_2''(t) - Y_1''(t)Y_2(x)\big] \frac{f(t)}{W(x)}\, dt,$$

Здесь $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ — фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения второго порядка $Y_{xx}'' - (Ax + B)Y_x' - (Cx + D)Y = 0$ (об этом уравнении см. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, 1995):

$$Y_1(x) = \exp(-kx)\Phi\big(\alpha,\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2}Az^2\big), \quad Y_2(x) = \exp(-kx)\Psi\big(\alpha,\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2}Az^2\big),$$
$$W(x) = -\sqrt{2\pi A}\,\big[\Gamma(\alpha)\big]^{-1} \exp\big(\tfrac{1}{2}Az^2 - 2kx\big), \quad k = C/A,$$
$$\alpha = \tfrac{1}{2}(A^2D - ABC - C^2)A^{-3}, \quad z = x + (AB + 2C)A^{-2},$$

где $\Phi\big(\alpha, \beta; x\big)$ и $\Psi\big(\alpha, \beta; x\big)$ — вырожденные гипергеометрические функции, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

2.1-3. Ядра уравнений в виде кубических полиномов по аргументам x, t

20. $y(x) + A\int_a^x x^3 y(t)\, dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A\int_a^x x^3 \exp\big[\tfrac{1}{4}A(t^4 - x^4)\big] f(t)\, dt.$$

21. $y(x) + A\int_a^x x^2 t y(t)\, dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A\int_a^x x^2 t \exp\big[\tfrac{1}{4}A(t^4 - x^4)\big] f(t)\, dt.$$

22. $y(x) + A\int_a^x x t^2 y(t)\, dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A\int_a^x x t^2 \exp\big[\tfrac{1}{4}A(t^4 - x^4)\big] f(t)\, dt.$$

23. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x t^3 y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A\int_a^x t^3 \exp\bigl[\tfrac{1}{4}A(t^4 - x^4)\bigr] f(t)\,dt.$$

24. $\boldsymbol{y(x) + \lambda\int_a^x (x-t)^3 y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.1.34 при $n = 3$.
Решение:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t) f(t)\,dt,$$

где

$$R(x) = \begin{cases} k\bigl[\operatorname{ch}(kx)\sin(kx) - \operatorname{sh}(kx)\cos(kx)\bigr], & k = \bigl(\tfrac{3}{2}\lambda\bigr)^{1/4} \quad \text{при} \quad \lambda > 0, \\ \tfrac{1}{2}s\bigl[\sin(sx) - \operatorname{sh}(sx)\bigr], & s = (-6\lambda)^{1/4} \quad \text{при} \quad \lambda < 0. \end{cases}$$

25. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x^3 - t^3) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.1.52 при $\lambda = 3$.

26. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \bigl(4x^3 - t^3\bigr) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.1.55 при $\lambda = 1$, $\mu = 3$.

27. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (xt^2 - t^3) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.1.49 при $\lambda = 2$.

28. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \bigl(x^2 t - t^3\bigr) y(t)\,dt = f(x).}$

Преобразование $z = x^2$, $\tau = t^2$, $y(x) = w(z)$ приводит к уравнению вида 2.1.4:

$$w(z) + \tfrac{1}{2}A\int_{a^2}^z (z-\tau) w(\tau)\,d\tau = F(z), \qquad F(z) = f(x).$$

29. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl(Ax^2 t + Bt^3\bigr) y(t)\,dt = f(x).}$

Преобразование $z = x^2$, $\tau = t^2$, $y(x) = w(z)$ приводит к уравнению вида 2.1.6:

$$w(z) + \int_{a^2}^z \bigl(\tfrac{1}{2}Az + \tfrac{1}{2}B\tau\bigr) w(\tau)\,d\tau = F(z), \qquad F(z) = f(x).$$

30. $\boldsymbol{y(x) + B\int_a^x \bigl(2x^3 - xt^2\bigr) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.1.55 при $\lambda = 2$, $\mu = 2$, $B = -2A$.

31. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \bigl(4x^3 - 3x^2 t\bigr) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.1.55 при $\lambda = 3$, $\mu = 1$.

32. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \big(ABx^3 - ABx^2t - Ax^2 - B\big) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $g(x) = Ax^2$, $\lambda = B$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt,$$

$$R(x,t) = (Ax^2 + B)\exp\big[\tfrac{1}{3}A(x^3 - t^3)\big] + B^2\int_t^x \exp\big[\tfrac{1}{3}A(s^3 - t^3) + B(x-s)\big]\, ds.$$

33. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \big(ABxt^2 - ABt^3 + At^2 + B\big) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $g(t) = At^2$, $\lambda = B$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt,$$

$$R(x,t) = -(At^2 + B)\exp\big[\tfrac{1}{3}A(t^3 - x^3)\big] + B^2\int_t^x \exp\big[\tfrac{1}{3}A(s^3 - x^3) + B(t-s)\big]\, ds.$$

2.1-4. Ядра уравнений в виде полиномов с более высокой степенью

34. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x-t)^n y(t)\, dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots}$

1°. Дифференцируя уравнение $n+1$ раз по x, для функции $y = y(x)$ получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение $(n+1)$-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y_x^{(n+1)} + An!\, y = f_x^{(n+1)}(x).$$

Это уравнение с начальными условиями $y(a) = f(a)$, $y'_x(a) = f'_x(a)$, $\ldots$, $y_x^{(n)}(a) = f_x^{(n)}(a)$ определяет решение исходного интегрального уравнения.

2°. Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt,$$

$$R(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \exp(\sigma_k x)\big[\sigma_k \cos(\beta_k x) - \beta_k \sin(\beta_k x)\big],$$

где коэффициенты σ_k и β_k вычисляются по формулам

$$\sigma_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \cos\Big(\frac{2\pi k}{n+1}\Big), \qquad \beta_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \sin\Big(\frac{2\pi k}{n+1}\Big) \qquad \text{при} \quad A < 0,$$

$$\sigma_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \cos\Big(\frac{2\pi k + \pi}{n+1}\Big), \quad \beta_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \sin\Big(\frac{2\pi k + \pi}{n+1}\Big) \qquad \text{при} \quad A > 0.$$

35. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty (t-x)^n y(t)\, dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots}$

Уравнение Пикара — Гурса.
Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(z) = A(-z)^n$.

1°. Решение однородного уравнения при $f \equiv 0$:

$$y(x) = Ce^{-\lambda x}, \qquad \lambda = \big(-An!\big)^{\frac{1}{n+1}},$$

где C — произвольная постоянная, $A < 0$. Это решение единственно при $n = 0, 1, 2, 3$.

Общее решение однородного уравнения при произвольном знаке A имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{s} C_k \exp(-\lambda_k x). \tag{1}$$

Здесь C_k — произвольные постоянные, λ_k — корни алгебраического уравнения $\lambda^{n+1} + An! = 0$, удовлетворящие условию $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$. Количество слагаемых в (1) определяется на основании неравенства $s \leqslant 2\left[\frac{n}{4}\right] + 1$, где $[a]$ обозначает целую часть числа a.

2°. Для правой части $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \exp(-\beta_k x)$, где $\beta_k > 0$, решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k \beta_k^{n+1}}{\beta_k^{n+1} + An!} \exp(-\beta_k x), \tag{2}$$

где $\beta_k^{n+1} + An! \neq 0$. При $A > 0$ эта формула может использоваться также для любых функций $f(x)$, которые разлагаются в сходящийся экспоненциальный ряд (что соответствует $m = \infty$).

3°. Для правой части $f(x) = e^{-\beta x} \sum\limits_{k=1}^{m} a_k x^k$, где $\beta > 0$, решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{-\beta x} \sum_{k=0}^{m} B_k x^k, \tag{3}$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Решение также можно построить с помощью формулы, приведенной в п. 3° уравнения 2.9.55.

4°. Для правой части $f(x) = \cos(\beta x) \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \exp(-\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\beta x) \sum_{k=1}^{m} B_k \exp(-\mu_k x) + \sin(\beta x) \sum_{k=1}^{m} C_k \exp(-\mu_k x), \tag{4}$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Решение также можно построить с помощью формул, приведенных в решении уравнения 2.9.60.

5°. Для правой части $f(x) = \sin(\beta x) \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \exp(-\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\beta x) \sum_{k=1}^{m} B_k \exp(-\mu_k x) + \sin(\beta x) \sum_{k=1}^{m} C_k \exp(-\mu_k x), \tag{5}$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Решение также можно построить с помощью формул, приведенных в решении уравнения 2.9.61.

6°. Для получения общего решения в пп. 2°–5° к правым частям выражений (2)–(5) следует прибавить решение однородного уравнения (1).

36. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x-t)t^n y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots}$

Частный случай уравнения 2.1.49 при $\lambda = n$.

37. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x^n - t^n)y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots}$

Частный случай уравнения 2.1.52 при $\lambda = n$.

38. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl(ABx^{n+1} - ABx^n t - Ax^n - B\bigr)y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $g(x) = Ax^n$, $\lambda = B$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t)f(t)\,dt,$$

где

$$R(x,t) = (Ax^n + B)\exp\left[\frac{A}{n+1}\bigl(x^{n+1} - t^{n+1}\bigr)\right] + \\ + B^2\int_t^x \exp\left[\frac{A}{n+1}\bigl(s^{n+1} - t^{n+1}\bigr) + B(x-s)\right] ds.$$

39. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl(ABxt^n - ABt^{n+1} + At^n + B\bigr)y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $g(t) = At^n$, $\lambda = B$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t)f(t)\,dt,$$

где

$$R(x,t) = -(At^n + B)\exp\left[\frac{A}{n+1}\bigl(t^{n+1} - x^{n+1}\bigr)\right] + \\ + B^2\int_t^x \exp\left[\frac{A}{n+1}\bigl(s^{n+1} - x^{n+1}\bigr) + B(t-s)\right] ds.$$

2.1-5. Ядра уравнений содержат рациональные функции

40. $\boldsymbol{y(x) + x^{-3}\int_a^x t\bigl[2Ax + (1-A)t\bigr]y(t)\,dt = f(x).}$

Это уравнение получается путем дифференцирования уравнения вида 1.1.17:

$$\int_a^x \bigl[Ax^2 t + (1-A)xt^2\bigr]y(t)\,dt = F(x), \qquad F(x) = \int_a^x t^3 f(t)\,dt.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x^{-A}\int_a^x t^{A-1}\varphi_t'(t)\,dt\right], \qquad \varphi(x) = \frac{1}{x}\int_a^x t^3 f(t)\,dt.$$

41. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_0^x \frac{y(t)\,dt}{x+t} = f(x).}$

Уравнение Диксона (A. C. Dixon). Частный случай уравнения 2.1.62 при $a = b = 1$, $\mu = 0$.

1°. Решение однородного уравнения ($f \equiv 0$) имеет вид

$$y(x) = Cx^\beta \qquad (\beta > -1,\ \lambda > 0). \tag{1}$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из следующего трансцендентного уравнения:

$$\lambda I(\beta) = 1, \qquad \text{где} \quad I(\beta) = \int_0^1 \frac{z^\beta\,dz}{1+z}. \tag{2}$$

2°. Для правой части полиномиального вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n x^n$$

ограниченное в нуле решение интегрального уравнения дается формулами

$$y(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)} x^n & \text{при } \lambda < \lambda_0, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)} x^n + Cx^\beta & \text{при } \lambda > \lambda_0,\ \lambda \neq \lambda_n, \end{cases}$$

$$\lambda_n = \frac{1}{I(n)}, \qquad I(n) = (-1)^n \left[\ln 2 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{m}\right],$$

где C — произвольная постоянная, а зависимость $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения (2).

При специальных значениях параметра $\lambda = \lambda_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ решение отличается одним слагаемым и имеет вид

$$y(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{A_m}{1-(\lambda_n/\lambda_m)} x^m + \sum_{m=n+1}^{N} \frac{A_m}{1-(\lambda_n/\lambda_m)} x^m - A_n \frac{\bar{\lambda}_n}{\lambda_n} x^n \ln x + Cx^n,$$

где $\bar{\lambda}_n = (-1)^{n+1} \left[\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}\right]^{-1}$.

Замечание. Для произвольной правой части $f(x)$, разлагающейся в степенной ряд, можно использовать формулы п. 2°, в которых следует положить $N = \infty$. При этом радиус сходимости полученного решения $y(x)$ будет равен радиусу сходимости ряда для функции $f(x)$.

3°. Для правой части логарифмически-полиномиального вида

$$f(x) = \ln x \left(\sum_{n=0}^{N} A_n x^n\right)$$

решение интегрального уравнения с логарифмической особенностью в нуле определяется формулами

$$y(x) = \begin{cases} \displaystyle\ln x \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)} x^n + \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n D_n \lambda}{[1-(\lambda/\lambda_n)]^2} x^n & \text{при } \lambda < \lambda_0, \\ \displaystyle\ln x \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)} x^n + \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n D_n \lambda}{[1-(\lambda/\lambda_n)]^2} x^n + Cx^\beta & \text{при } \lambda > \lambda_0,\ \lambda \neq \lambda_n, \end{cases}$$

$$\lambda_n = \frac{1}{I(n)}, \quad I(n) = (-1)^n \left[\ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right], \quad D_n = (-1)^{n+1} \left[\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}\right].$$

4°. Для произвольной правой части $f(x)$ преобразование

$$x = \tfrac{1}{2} e^{2z}, \quad t = \tfrac{1}{2} e^{2\tau}, \quad y(x) = e^{-z} w(z), \quad f(x) = e^{-z} g(z)$$

приводит к интегральному уравнению с разностным ядром вида 2.9.51:

$$w(z) - \lambda \int_{-\infty}^{z} \frac{w(\tau)\,d\tau}{\operatorname{ch}(z-\tau)} = g(z).$$

42. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^x \frac{x+b}{t+b}\, y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.1 при $g(x) = x + b$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \frac{x+b}{t+b} e^{\lambda(x-t)} f(t)\,dt.$$

43. $\boldsymbol{y(x) = \frac{2}{(1-\lambda^2)x^2}\int_{\lambda x}^x \frac{t}{1+t}\, y(t)\,dt.}$

Это уравнение встречается в ядерной физике и описывает замедление нейтронов в веществе.

1°. Решение при $\lambda = 0$:

$$y(x) = \frac{C}{(1+x)^2},$$

где C — произвольная постоянная.

2°. При $\lambda \neq 0$ решение интегрального уравнения можно найти в виде ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n.$$

◉ *Литература*: И. Снеддон (1955).

2.1-6. Ядра уравнений содержат квадратные корни и дробные степени

44. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x-t)\sqrt{t}\, y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.1.49 при $\lambda = \frac{1}{2}$.

45. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (\sqrt{x} - \sqrt{t})\, y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.1.52 при $\lambda = \frac{1}{2}$.

46. $\boldsymbol{y(x) + \lambda\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = f(x).}$

Уравнение Абеля второго рода. Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса.

Решение:

$$y(x) = F(x) + \pi\lambda^2 \int_a^x \exp[\pi\lambda^2(x-t)] F(t)\,dt,$$

где

$$F(x) = f(x) - \lambda \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}.$$

◉ *Литература*: H. Brakhage, K. Nickel, P. Rieder (1965), Ю. И. Бабенко (1986, стр. 14).

47. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_0^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{ax^2 + bt^2}} = f(x), \qquad a > 0, \quad b > 0.}$

1°. Решение однородного уравнения ($f \equiv 0$) имеет вид

$$y(x) = Cx^\beta \qquad (\beta > -1, \quad \lambda > 0). \tag{1}$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\lambda I(\beta) = 1, \qquad \text{где} \quad I(\beta) = \int_0^1 \frac{z^\beta\,dz}{\sqrt{a + bz^2}}. \tag{2}$$

2°. Для правой части полиномиального вида
$$f(x)=\sum_{n=0}^{N}A_nx^n$$
ограниченное в нуле решение интегрального уравнения определяется формулами
$$y(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)}x^n & \text{при}\ \ \lambda<\lambda_0,\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)}x^n+Cx^\beta & \text{при}\ \ \lambda>\lambda_0,\ \lambda\neq\lambda_n,\end{cases}$$
$$\lambda_0=\frac{\sqrt{b}}{\operatorname{Arsh}\bigl(\sqrt{b/a}\,\bigr)},\qquad \lambda_n=\frac{1}{I(n)},\qquad I(n)=\int_0^1\frac{z^n\,dz}{\sqrt{a+bz^2}}.$$
Здесь C — произвольная постоянная, а зависимость $\beta=\beta(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения (2).

3°. При специальных значениях параметра $\lambda=\lambda_n$ $(n=1,2,\dots)$ решение отличается одним слагаемым и имеет вид
$$y(x)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{A_m}{1-(\lambda_n/\lambda_m)}x^m+\sum_{m=n+1}^{N}\frac{A_m}{1-(\lambda_n/\lambda_m)}x^m-A_n\frac{\bar\lambda_n}{\lambda_n}x^n\ln x+Cx^n,$$
где $\displaystyle\bar\lambda_n=\left[\int_0^1\frac{z^n\ln z\,dz}{\sqrt{a+bz^2}}\right]^{-1}$.

4°. Для произвольной части $f(x)$, разлагающейся в степенной ряд, можно использовать формулы п. 2°, в которых следует положить $N=\infty$. При этом радиус сходимости полученного решения $y(x)$ будет равен радиусу сходимости ряда для функции $f(x)$.

48. $\displaystyle \boldsymbol{y(x)+\lambda\int_a^x\frac{y(t)\,dt}{(x-t)^{3/4}}=f(x).}$

Это уравнение допускает решение в квадратурах (см. уравнение 2.1.60).

2.1-7. Ядра уравнений содержат произвольные степени

49. $\displaystyle \boldsymbol{y(x)+A\int_a^x(x-t)t^\lambda y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.4 при $g(t)=At^\lambda$.

Решение:
$$y(x)=f(x)+\frac{A}{W}\int_a^x\bigl[y_1(x)y_2(t)-y_2(x)y_1(t)\bigr]t^\lambda f(t)\,dt,$$
где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $y''_{xx}+Ax^\lambda y=0$, причем функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака параметра A.

При $A>0$ имеем
$$W=\frac{2q}{\pi},\quad y_1(x)=\sqrt{x}\,J_{\frac{1}{2q}}\biggl(\frac{\sqrt{A}}{q}x^q\biggr),\quad y_2(x)=\sqrt{x}\,Y_{\frac{1}{2q}}\biggl(\frac{\sqrt{A}}{q}x^q\biggr),\quad q=\frac{\lambda+2}{2}.$$
При $A<0$ имеем
$$W=-q,\quad y_1(x)=\sqrt{x}\,I_{\frac{1}{2q}}\biggl(\frac{\sqrt{|A|}}{q}x^q\biggr),\quad y_2(x)=\sqrt{x}\,K_{\frac{1}{2q}}\biggl(\frac{\sqrt{|A|}}{q}x^q\biggr),\quad q=\frac{\lambda+2}{2}.$$

50. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x x^\lambda t^\mu y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^\lambda$, $h(t) = t^\mu$ (λ, μ — любые).
Решение:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x,t) f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = \begin{cases} Ax^\lambda t^\mu \exp\Bigl[\dfrac{A}{\lambda+\mu+1}\bigl(t^{\lambda+\mu+1} - x^{\lambda+\mu+1}\bigr)\Bigr] & \text{при} \quad \lambda+\mu+1 \neq 0, \\ Ax^{\lambda-A} t^{\mu+A} & \text{при} \quad \lambda+\mu+1 = 0. \end{cases}$$

51. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x-t)x^\lambda t^\mu y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $u(x) = x^{-\lambda} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.49:

$$u(x) + A\int_a^x (x-t) t^{\lambda+\mu} u(t)\,dt = f(x) x^{-\lambda}.$$

52. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x^\lambda - t^\lambda) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.5 при $g(x) = Ax^\lambda$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W}\int_a^x \bigl[u_1'(x)u_2'(t) - u_2'(x)u_1'(t)\bigr] f(t)\,dt,$$

где штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках, $u_1(x), u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + A\lambda x^{\lambda-1} u = 0$, которая выражается через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака произведения $A\lambda$.

При $A\lambda > 0$ имеем

$$W = \frac{2q}{\pi}, \quad u_1(x) = \sqrt{x}\, J_{\frac{1}{2q}}\biggl(\frac{\sqrt{A\lambda}}{q} x^q\biggr), \quad u_2(x) = \sqrt{x}\, Y_{\frac{1}{2q}}\biggl(\frac{\sqrt{A\lambda}}{q} x^q\biggr), \quad q = \frac{\lambda+1}{2}.$$

При $A\lambda < 0$ имеем

$$W = -q, \quad u_1(x) = \sqrt{x}\, I_{\frac{1}{2q}}\biggl(\frac{\sqrt{|A\lambda|}}{q} x^q\biggr), \quad u_2(x) = \sqrt{x}\, K_{\frac{1}{2q}}\biggl(\frac{\sqrt{|A\lambda|}}{q} x^q\biggr), \quad q = \frac{\lambda+1}{2}.$$

53. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \bigl(Ax^\lambda t^{\lambda-1} + Bt^{2\lambda-1}\bigr) y(t)\,dt = f(x).}$

Преобразование

$$z = x^\lambda, \quad \tau = t^\lambda, \quad y(x) = Y(z)$$

приводит к уравнению вида 2.1.6:

$$Y(z) - \int_b^z \biggl(\frac{A}{\lambda} z + \frac{B}{\lambda}\tau\biggr) Y(\tau)\,d\tau = F(z), \qquad F(z) = f(x),\ b = a^\lambda.$$

54. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \bigl(Ax^{\lambda+\mu} t^{\lambda-\mu-1} + Bx^\mu t^{2\lambda-\mu-1}\bigr) y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $y(x) = x^\mu w(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.53:

$$w(x) - \int_a^x \bigl(Ax^\lambda t^{\lambda-1} + Bt^{2\lambda-1}\bigr) w(t)\,dt = x^{-\mu} f(x).$$

55. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \left[\lambda x^{\lambda-1}t^{\mu} - (\lambda+\mu)x^{\lambda+\mu-1}\right] y(t)\,dt = f(x).}$

Это уравнение получается путем дифференцирования уравнения 1.1.51:

$$\int_a^x \left[1 + A(x^{\lambda}t^{\mu} - x^{\lambda+\mu})\right] y(t)\,dt = F(x), \qquad F(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{x^{\lambda}}{\Phi(x)}\int_a^x \left[t^{-\lambda}F(t)\right]_t'\Phi(t)\,dt\right\}, \qquad \Phi(x) = \exp\left(-\frac{A\mu}{\mu+\lambda}x^{\mu+\lambda}\right).$$

56. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \left(ABx^{\lambda+1} - ABx^{\lambda}t - Ax^{\lambda} - B\right) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t)f(t)\,dt,$$

где

$$R(x,t) = (Ax^{\lambda} + B)\exp\left[\frac{A}{\lambda+1}\left(x^{\lambda+1} - t^{\lambda+1}\right)\right] + \\ + B^2\int_t^x \exp\left[\frac{A}{\lambda+1}\left(s^{\lambda+1} - t^{\lambda+1}\right) + B(x-s)\right] ds.$$

57. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \left(ABxt^{\lambda} - ABt^{\lambda+1} + At^{\lambda} + B\right) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t)f(t)\,dt,$$

где

$$R(x,t) = -(At^{\lambda} + B)\exp\left[\frac{A}{\lambda+1}\left(t^{\lambda+1} - x^{\lambda+1}\right)\right] + \\ + B^2\int_t^x \exp\left[\frac{A}{\lambda+1}\left(s^{\lambda+1} - x^{\lambda+1}\right) + B(t-s)\right] ds.$$

58. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^x \left(\frac{x+b}{t+b}\right)^{\mu} y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.1 при $g(x) = (x+b)^{\mu}$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda\int_a^x \left(\frac{x+b}{t+b}\right)^{\mu} e^{\lambda(x-t)}f(t)\,dt.$$

59. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^x \frac{x^{\mu}+b}{t^{\mu}+b}\,y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.1 при $g(x) = x^{\mu} + b$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda\int_a^x \frac{x^{\mu}+b}{t^{\mu}+b}e^{\lambda(x-t)}f(t)\,dt.$$

60. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_0^x \frac{y(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} = f(x), \qquad 0 < \alpha < 1.}$

Обобщенное уравнение Абеля второго рода.

1°. Пусть число α может быть представлено в виде правильной дроби:

$$\alpha = 1 - \frac{m}{n}, \qquad \text{где} \quad m = 1, 2, \ldots, \quad n = 2, 3, \ldots \quad (m < n).$$

В этом случае решение обобщенного уравнения Абеля второго рода может быть представлено в замкнутом виде (в виде квадратур):

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t)\,dt,$$

где

$$R(x) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\lambda^\nu \Gamma^\nu(m/n)}{\Gamma(\nu m/n)} x^{(\nu m/n)-1} + \frac{b}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} \varepsilon_\mu \exp(\varepsilon_\mu bx) +$$
$$+ \frac{b}{m} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\lambda^\nu \Gamma^\nu(m/n)}{\Gamma(\nu m/n)} \left[\sum_{\mu=0}^{m-1} \varepsilon_\mu \exp(\varepsilon_\mu bx) \int_0^x t^{(\nu m/n)-1} \exp(-\varepsilon_\mu bt)\,dt \right],$$

$$b = \lambda^{n/m} \Gamma^{n/m}(m/n), \quad \varepsilon_\mu = \exp\left(\frac{2\pi\mu i}{m}\right), \quad i^2 = -1, \quad \mu = 0, 1, \ldots, m-1.$$

2°. Решение при любых $0 < \alpha < 1$:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad R(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\left[\lambda \Gamma(1-\alpha) x^{1-\alpha}\right]^n}{x \Gamma\left[n(1-\alpha)\right]}.$$

⦿ *Литература*: H. Brakhage, K. Nickel, P. Rieder (1965), В. И. Смирнов (1974, стр. 155, 156).

61. $\boldsymbol{y(x) - \frac{\lambda}{x^\alpha} \int_0^x \frac{y(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \qquad 0 < \alpha \leqslant 1.}$

1°. Решение однородного уравнения ($f \equiv 0$) имеет вид

$$y(x) = Cx^\beta \qquad (\beta > -1, \ \lambda > 0). \tag{1}$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\lambda B(\alpha, \beta + 1) = 1, \tag{2}$$

где $B(p, q) = \int_0^1 z^{p-1} (1-z)^{q-1}\,dz$ — бета-функция.

2°. Для правой части полиномиального вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^N A_n x^n$$

ограниченное в нуле решение интегрального уравнения определяется формулами

$$y(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^N \frac{A_n}{1 - (\lambda/\lambda_n)} x^n & \text{при} \quad \lambda < \alpha, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^N \frac{A_n}{1 - (\lambda/\lambda_n)} x^n + Cx^\beta & \text{при} \quad \lambda > \alpha, \, \lambda \neq \lambda_n, \end{cases}$$

$$\lambda_n = \frac{(\alpha)_{n+1}}{n!}, \qquad (\alpha)_{n+1} = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а зависимость $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения (2).

При специальных значениях параметра $\lambda = \lambda_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ решение отличается одним слагаемым и имеет вид

$$y(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{A_m}{1 - (\lambda_n/\lambda_m)} x^m + \sum_{m=n+1}^{N} \frac{A_m}{1 - (\lambda_n/\lambda_m)} x^m - A_n \frac{\bar{\lambda}_n}{\lambda_n} x^n \ln x + Cx^n,$$

где $\bar{\lambda}_n = \left[\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^n \ln z \, dz\right]^{-1}$.

3°. Для произвольной части $f(x)$, разлагающейся в степенной ряд, можно использовать формулы п. 2°, в которых следует положить $N = \infty$. При этом радиус сходимости полученного решения $y(x)$ будет равен радиусу сходимости ряда для функции $f(x)$.

4°. Для правой части интегрального уравнения

$$f(x) = \ln(kx) \sum_{n=0}^{N} A_n x^n$$

решение имеет вид

$$y(x) = \ln(kx) \sum_{n=0}^{N} B_n x^n + \sum_{n=0}^{N} D_n x^n,$$

где значения постоянных B_n и D_n определяются методом неопределенных коэффициентов. Для получения общего решения интегрального уравнения к полученным частным решениям следует прибавить решение однородного уравнения (1).

В работе Л. Г. Михайлова (1966, стр. 29, 30) были исследованы условия разрешимости рассматриваемого интегрального уравнения для различных классов функций $f(x)$.

62. $\displaystyle y(x) - \frac{\lambda}{x^\mu} \int_0^x \frac{y(t)\, dt}{(ax+bt)^{1-\mu}} = f(x).$

Здесь $a > 0$, $b > 0$, а μ — произвольное число.

1°. Решение однородного уравнения $(f \equiv 0)$ имеет вид

$$y(x) = Cx^\beta \qquad (\beta > -1,\ \lambda > 0). \tag{1}$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\lambda I(\beta) = 1, \qquad \text{где} \quad I(\beta) = \int_0^1 z^\beta (a+bz)^{\mu-1}\, dz. \tag{2}$$

2°. Для правой части полиномиального вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n x^n$$

ограниченное в нуле решение интегрального уравнения определяется формулами

$$y(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)} x^n & \text{при } \lambda < \lambda_0, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)} x^n + Cx^\beta & \text{при } \lambda > \lambda_0,\ \lambda \neq \lambda_n, \end{cases}$$

$$\lambda_n = \frac{1}{I(n)}, \qquad I(n) = \int_0^1 z^n (a+bz)^{\mu-1}\, dz.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а зависимость $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения (2).

3°. При специальных значениях параметра $\lambda = \lambda_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ решение отличается одним слагаемым и имеет вид

$$y(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{A_m}{1-(\lambda_n/\lambda_m)} x^m + \sum_{m=n+1}^{N} \frac{A_m}{1-(\lambda_n/\lambda_m)} x^m - A_n \frac{\bar{\lambda}_n}{\lambda_n} x^n \ln x + Cx^n,$$

где $\bar{\lambda}_n = \left[\int_0^1 z^n (a+bz)^{\mu-1} \ln z \, dz \right]^{-1}$.

4°. Для произвольной части $f(x)$, разлагающейся в степенной ряд, можно использовать формулы п. 2°, в которых следует положить $N = \infty$.При этом радиус сходимости полученного решения $y(x)$ будет равен радиусу сходимости ряда для функции $f(x)$.

2.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции

2.2-1. Ядра уравнений содержат экспоненциальные функции

1. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x e^{\lambda(x-t)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A\int_a^x e^{(\lambda-A)(x-t)} f(t)\,dt.$$

2. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x e^{\lambda x+\beta t} y(t)\,dt = f(x).}$

В случае $\beta = -\lambda$ см. уравнение 2.2.1. Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ae^{\lambda x}$, $h(t) = e^{\beta t}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x,t) f(t)\,dt, \qquad R(x,t) = Ae^{\lambda x+\beta t} \exp\left\{ \frac{A}{\lambda+\beta} \left[e^{(\lambda+\beta)t} - e^{(\lambda+\beta)x} \right] \right\}.$$

3. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \left[e^{\lambda(x-t)} - 1\right] y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Решение при $D \equiv \lambda(\lambda - 4A) > 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{2A\lambda}{\sqrt{D}} \int_a^x R(x-t) f(t)\,dt, \qquad R(x) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\lambda x\right) \operatorname{sh}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{D}\,x\right).$$

2°. Решение при $D \equiv \lambda(\lambda - 4A) < 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{2A\lambda}{\sqrt{|D|}} \int_a^x R(x-t) f(t)\,dt, \qquad R(x) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\lambda x\right) \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{|D|}\,x\right).$$

3°. Решение при $\lambda = 4A$:

$$y(x) = f(x) - 4A^2 \int_a^x (x-t) \exp\left[2A(x-t)\right] f(t)\,dt.$$

4. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \left[Ae^{\lambda(x-t)} + B\right] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.2.10 при $A_1 = A$, $A_2 = B$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 0$.

1°. Структура решения интегрального уравнения зависит от знака дискриминанта

$$D \equiv (A - B - \lambda)^2 + 4AB \tag{1}$$

квадратного уравнения

$$\mu^2 + (A + B - \lambda)\mu - B\lambda = 0. \tag{2}$$

2°. В случае $D > 0$ квадратное уравнение (2) имеет действительные (и различные) корни μ_1 и μ_2:

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}(\lambda - A - B) + \tfrac{1}{2}\sqrt{D}, \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}(\lambda - A - B) - \tfrac{1}{2}\sqrt{D}.$$

При этом решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \bigl[E_1 e^{\mu_1(x-t)} + E_2 e^{\mu_2(x-t)}\bigr] f(t)\,dt,$$

где

$$E_1 = A\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} + B\frac{\mu_1 - \lambda}{\mu_2 - \mu_1}, \qquad E_2 = A\frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} + B\frac{\mu_2 - \lambda}{\mu_1 - \mu_2}.$$

3°. В случае $D < 0$ квадратное уравнение (2) имеет комплексно сопряженные корни

$$\mu_1 = \sigma + i\beta, \quad \mu_2 = \sigma - i\beta, \qquad \sigma = \tfrac{1}{2}(\lambda - A - B), \quad \beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{-D}.$$

При этом решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \Bigl\{E_1 e^{\sigma(x-t)} \cos[\beta(x-t)] + E_2 e^{\sigma(x-t)} \sin[\beta(x-t)]\Bigr\} f(t)\,dt,$$

где

$$E_1 = -A - B, \qquad E_2 = \frac{1}{\beta}(-A\sigma - B\sigma + B\lambda).$$

5. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (e^{\lambda x} - e^{\lambda t})y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.5 при $g(x) = Ae^{\lambda x}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W}\int_a^x \bigl[u_1'(x)u_2'(t) - u_2'(x)u_1'(t)\bigr] f(t)\,dt,$$

где штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках, $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + A\lambda e^{\lambda x}u = 0$, которая выражается через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака произведения $A\lambda$.

При $A\lambda > 0$ имеем

$$W = \frac{\lambda}{\pi}, \quad u_1(x) = J_0\biggl(\frac{2\sqrt{A\lambda}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\biggr), \quad u_2(x) = Y_0\biggl(\frac{2\sqrt{A\lambda}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\biggr).$$

При $A\lambda < 0$ имеем

$$W = -\frac{\lambda}{2}, \quad u_1(x) = I_0\biggl(\frac{2\sqrt{|A\lambda|}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\biggr), \quad u_2(x) = K_0\biggl(\frac{2\sqrt{|A\lambda|}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\biggr).$$

6. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \left(Ae^{\lambda x} + Be^{\lambda t}\right) y(t)\,dt = f(x).}$

При $B = -A$ см. уравнение 2.2.5. Частный случай уравнения 2.9.6 при $g(x) = Ae^{\lambda x}$, $h(t) = Be^{\lambda t}$.

Исходное интегральное уравнение путем дифференцирования с последующей заменой $Y(x) = \int_a^x y(t)\,dt$ сводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$Y''_{xx} + (A+B)e^{\lambda x}Y'_x + A\lambda e^{\lambda x}Y = f'_x(x) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$Y(a) = 0, \quad Y'_x(a) = f(a). \tag{2}$$

Фундаментальная система решений однородного уравнения (1) при $f \equiv 0$ имеет вид

$$Y_1(x) = \Phi\Big(\frac{A}{m}, 1; -\frac{m}{\lambda}e^{\lambda x}\Big), \quad Y_2(x) = \Psi\Big(\frac{A}{m}, 1; -\frac{m}{\lambda}e^{\lambda x}\Big), \quad m = A+B,$$

где $\Phi(\alpha, \beta; x)$ и $\Psi(\alpha, \beta; x)$ — вырожденные гипергеометрические функции.

Решение неоднородного уравнения (1) с граничными условиями (2) для произвольной функции $f = f(x)$ с учетом равенства $y(x) = Y'_x(x)$ приводит к решению интегрального уравнения в виде

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x,t) f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = \frac{\Gamma(A/m)}{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\Big\{\exp\Big(\frac{m}{\lambda}e^{\lambda t}\Big)\big[Y_1(x)Y_2(t) - Y_2(x)Y_1(t)\big]\Big\}.$$

7. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \left[e^{\lambda(x+t)} - e^{2\lambda t}\right] y(t)\,dt = f(x).}$

Преобразование $z = e^{\lambda x}$, $\tau = e^{\lambda t}$ приводит к уравнению вида 2.1.4.

1°. Решение при $A\lambda > 0$:

$$y(x) = f(x) - \lambda k \int_a^x e^{\lambda t} \sin\big[k(e^{\lambda x} - e^{\lambda t})\big] f(t)\,dt, \qquad k = \sqrt{A/\lambda}.$$

2°. Решение при $A\lambda < 0$:

$$y(x) = f(x) + \lambda k \int_a^x e^{\lambda t} \operatorname{sh}\big[k(e^{\lambda x} - e^{\lambda t})\big] f(t)\,dt, \qquad k = \sqrt{|A/\lambda|}.$$

8. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \left[e^{\lambda x + \mu t} - e^{(\lambda+\mu)t}\right] y(t)\,dt = f(x).}$

Преобразование $z = e^{\mu x}$, $\tau = e^{\mu t}$, $Y(z) = y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.52:

$$Y(z) + \frac{A}{\mu}\int_b^z (z^k - \tau^k) Y(\tau)\,d\tau = F(z), \qquad F(z) = f(x),$$

где $k = \lambda/\mu$, $b = e^{\mu a}$.

9. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \left[\lambda e^{\lambda x + \mu t} - (\lambda+\mu)e^{(\lambda+\mu)x}\right] y(t)\,dt = f(x).}$

Это уравнение получается путем дифференцирования уравнения вида 1.2.22:

$$\int_a^x \big[1 + Ae^{\lambda x}(e^{\mu t} - e^{\mu x})\big] y(t)\,dt = F(x), \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx}\left\{e^{\lambda x}\Phi(x)\int_a^x \left[\frac{F(t)}{e^{\lambda t}}\right]'_t \frac{dt}{\Phi(t)}\right\}, \qquad \Phi(x) = \exp\left[\frac{A\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)x}\right].$$

10. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \left[A_1 e^{\lambda_1(x-t)} + A_2 e^{\lambda_2(x-t)}\right] y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Введем обозначения

$$I_1 = \int_a^x e^{\lambda_1(x-t)} y(t)\,dt, \qquad I_2 = \int_a^x e^{\lambda_2(x-t)} y(t)\,dt.$$

Продифференцируем дважды интегральное уравнение. В результате имеем (первым записано исходное уравнение)

$$y + A_1 I_1 + A_2 I_2 = f, \qquad f = f(x), \tag{1}$$

$$y'_x + (A_1 + A_2)y + A_1\lambda_1 I_1 + A_2\lambda_2 I_2 = f'_x, \tag{2}$$

$$y''_{xx} + (A_1 + A_2)y'_x + (A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2)y + A_1\lambda_1^2 I_1 + A_2\lambda_2^2 I_2 = f''_{xx}. \tag{3}$$

Исключая отсюда величины I_1 и I_2, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + (A_1 + A_2 - \lambda_1 - \lambda_2)y'_x + (\lambda_1\lambda_2 - A_1\lambda_2 - A_2\lambda_1)y = f''_{xx} - (\lambda_1 + \lambda_2)f'_x + \lambda_1\lambda_2 f. \tag{4}$$

Подставляя значение $x = a$ в равенства (1) и (2), получим начальные условия

$$y(a) = f(a), \qquad y'_x(a) = f'_x(a) - (A_1 + A_2)f(a). \tag{5}$$

Решение дифференциального уравнения (4) с условиями (5) позволяет найти решение интегрального уравнения.

2°. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\mu^2 + (A_1 + A_2 - \lambda_1 - \lambda_2)\mu + \lambda_1\lambda_2 - A_1\lambda_2 - A_2\lambda_1 = 0, \tag{6}$$

которое соответствует однородному дифференциальному уравнению (4) при $f(x) \equiv 0$. Структура решения интегрального уравнения зависит от знака дискриминанта квадратного уравнения (6)

$$D \equiv (A_1 - A_2 - \lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4A_1A_2.$$

В случае $D > 0$ квадратное уравнение (6) имеет действительные (и различные) корни μ_1 и μ_2:

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - A_1 - A_2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{D}, \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - A_1 - A_2) - \tfrac{1}{2}\sqrt{D}.$$

При этом решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \left[B_1 e^{\mu_1(x-t)} + B_2 e^{\mu_2(x-t)}\right] f(t)\,dt,$$

где

$$B_1 = A_1\frac{\mu_1 - \lambda_2}{\mu_2 - \mu_1} + A_2\frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_2 - \mu_1}, \qquad B_2 = A_1\frac{\mu_2 - \lambda_2}{\mu_1 - \mu_2} + A_2\frac{\mu_2 - \lambda_1}{\mu_1 - \mu_2}.$$

В случае $D < 0$ квадратное уравнение (6) имеет комплексно сопряженные корни

$$\mu_1 = \sigma + i\beta, \quad \mu_2 = \sigma - i\beta, \qquad \sigma = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - A_1 - A_2), \quad \beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{-D}.$$

При этом решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \left\{B_1 e^{\sigma(x-t)}\cos[\beta(x-t)] + B_2 e^{\sigma(x-t)}\sin[\beta(x-t)]\right\} f(t)\,dt.$$

где

$$B_1 = -A_1 - A_2, \qquad B_2 = \frac{1}{\beta}\left[A_1(\lambda_2 - \sigma) + A_2(\lambda_1 - \sigma)\right].$$

11. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^x\big[Ae^{\lambda(x+t)}-Ae^{2\lambda t}+Be^{\lambda t}\big]y(t)\,dt=f(x).}$

Преобразование $z=e^{\lambda x}$, $\tau=e^{\lambda t}$, $Y(z)=y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.5:

$$Y(z)+\int_b^z\big[B_1(z-\tau)+A_1\big]Y(\tau)\,d\tau=F(z),\qquad F(z)=f(x),$$

где $A_1=B/\lambda$, $B_1=A/\lambda$, $b=e^{\lambda a}$.

12. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^x\big[Ae^{\lambda(x+t)}+Be^{2\lambda t}+Ce^{\lambda t}\big]y(t)\,dt=f(x).}$

Преобразование $z=e^{\lambda x}$, $\tau=e^{\lambda t}$, $Y(z)=y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.6:

$$Y(z)-\int_b^z(A_1z+B_1\tau+C_1)Y(\tau)\,d\tau=F(z),\qquad F(z)=f(x),$$

где $A_1=-A/\lambda$, $B_1=-B/\lambda$, $C_1=-C/\lambda$, $b=e^{\lambda a}$.

13. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^x\big[\lambda e^{\lambda(x-t)}+A\big(\mu e^{\mu x+\lambda t}-\lambda e^{\lambda x+\mu t}\big)\big]y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.23 при $h(t)=A$.
Решение:

$$y(x)=\frac{1}{e^{\lambda x}}\frac{d}{dx}\left\{\Phi(x)\int_a^x\left[\frac{F(t)}{e^{\lambda t}}\right]_t'\frac{e^{2\lambda t}}{\Phi(t)}\,dt\right\},$$

$$\Phi(x)=\exp\left[A\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)x}\right],\quad F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

14. $\boldsymbol{y(x)-\int_a^x\big[\lambda e^{-\lambda(x-t)}+A\big(\mu e^{\lambda x+\mu t}-\lambda e^{\mu x+\lambda t}\big)\big]y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.24 при $h(x)=A$.
Считаем, что $f(a)=0$. Решение:

$$y(x)=\int_a^x w(t)\,dt,\qquad w(x)=e^{-\lambda x}\frac{d}{dx}\left\{\frac{e^{2\lambda x}}{\Phi(x)}\int_a^x\left[\frac{f(t)}{e^{\lambda t}}\right]_t'\Phi(t)\,dt\right\},$$

$$\Phi(x)=\exp\left[A\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)x}\right].$$

15. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^x\big[\lambda e^{\lambda(x-t)}+Ae^{\beta t}\big(\mu e^{\mu x+\lambda t}-\lambda e^{\lambda x+\mu t}\big)\big]y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.23 при $h(t)=Ae^{\beta t}$.
Решение:

$$y(x)=e^{-(\lambda+\beta)x}\frac{d}{dx}\left\{\Phi(x)\int_a^x\left[\frac{F(t)}{e^{\lambda t}}\right]_t'\frac{e^{(2\lambda+\beta)t}}{\Phi(t)}\,dt\right\},$$

$$\Phi(x)=\exp\left[A\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu+\beta}e^{(\lambda+\mu+\beta)x}\right],\quad F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

16. $\boldsymbol{y(x)-\int_a^x\big[\lambda e^{-\lambda(x-t)}+Ae^{\beta x}\big(\mu e^{\lambda x+\mu t}-\lambda e^{\mu x+\lambda t}\big)\big]y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.24 при $h(x)=Ae^{\beta x}$.
Считаем, что $f(a)=0$. Решение:

$$y(x)=\int_a^x w(t)\,dt,\qquad w(x)=e^{-\lambda x}\frac{d}{dx}\left\{\frac{e^{(2\lambda+\beta)x}}{\Phi(x)}\int_a^x\left[\frac{f(t)}{e^{(\lambda+\beta)t}}\right]_t'\Phi(t)\,dt\right\},$$

$$\Phi(x)=\exp\left[A\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu+\beta}e^{(\lambda+\mu+\beta)x}\right].$$

17. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \big[ABe^{(\lambda+1)x+t} - ABe^{\lambda x+2t} - Ae^{\lambda x+t} - Be^t\big] y(t)\,dt = f(x).}$

Преобразование $z = e^x$, $\tau = e^t$, $Y(z) = y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.56:

$$Y(z) + \int_b^z \big(ABz^{\lambda+1} - ABz^\lambda \tau - Az^\lambda - B\big) Y(\tau)\,d\tau = F(z),$$

где $F(z) = f(x)$, $b = e^a$.

18. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \big[ABe^{x+\lambda t} - ABe^{(\lambda+1)t} + Ae^{\lambda t} + Be^t\big] y(t)\,dt = f(x).}$

Преобразование $z = e^x$, $\tau = e^t$, $Y(z) = y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.57 (в котором параметр λ переобозначен на $\lambda - 1$):

$$Y(z) + \int_b^z \big(ABz\tau^{\lambda-1} - AB\tau^\lambda + A\tau^{\lambda-1} + B\big) Y(\tau)\,d\tau = F(z),$$

где $F(z) = f(x)$, $b = e^a$.

19. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \Big[\sum_{k=1}^n A_k e^{\lambda_k (x-t)}\Big] y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Это интегральное уравнение можно привести к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению n-го порядка с постоянными коэффициентами. Обозначим

$$I_k(x) = \int_a^x e^{\lambda_k (x-t)} y(t)\,dt. \tag{1}$$

Продифференцируем (1) по x. В результате имеем

$$I_k' = y(x) + \lambda_k \int_a^x e^{\lambda_k (x-t)} y(t)\,dt, \tag{2}$$

где штрих обозначает производную по x. Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I_k' и I_k:

$$I_k' = y(x) + \lambda_k I_k, \qquad I_k = I_k(x). \tag{3}$$

Теперь интегральное уравнение можно записать в виде

$$y(x) + \sum_{k=1}^n A_k I_k = f(x). \tag{4}$$

Дифференцируя (4) по x, с учетом равенств (3) имеем

$$y_x'(x) + \sigma_n y(x) + \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k I_k = f_x'(x), \qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^n A_k. \tag{5}$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$y_x'(x) + (\sigma_n - \lambda_n) y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (\lambda_k - \lambda_n) I_k = f_x'(x) - \lambda_n f(x). \tag{6}$$

Дифференцируя это равенство по x и исключая интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum_{k=1}^{n-2} A_k^1 I_k$. Продолжая далее с помощью дифференцирования и формулы (3) последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, …, I_1, придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка n.

Граничные условия для функции $y(x)$ находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования.

2°. Решение уравнения можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \left[\sum_{k=1}^n B_k e^{\mu_k (x-t)}\right] f(t)\,dt. \tag{7}$$

Неизвестные постоянные μ_k являются корнями алгебраического уравнения

$$\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z-\lambda_k} + 1 = 0, \tag{8}$$

которое после приведения к общему знаменателю сводится к задаче об определении корней характеристического многочлена n-й степени.

Коэффициенты B_k находятся после определения μ_k из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \frac{B_k}{\lambda_m - \mu_k} + 1 = 0, \qquad m = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Другой способ определения коэффициентов B_k описан ниже в п. 3°.

Если все корни μ_k уравнения (8) действительны и различны, то формула (7) дает решение исходного интегрального уравнения.

Паре комплексно сопряженных корней $\mu_{k,k+1} = \alpha \pm i\beta$ характеристического многочлена (8) отвечает пара комплексно сопряженных коэффициентов $B_{k,k+1}$ в уравнениях (9). В этом случае в решении (7) соответствующую пару слагаемых $B_k e^{\mu_k(x-t)} + B_{k+1} e^{\mu_{k+1}(x-t)}$ можно представить в виде $\overline{B}_k e^{\alpha(x-t)}\bigl[\cos\beta(x-t)\bigr] + \overline{B}_{k+1} e^{\alpha(x-t)}\bigl[\sin\beta(x-t)\bigr]$, где $\overline{B}_k$ и $\overline{B}_{k+1}$ — действительные коэффициенты.

3°. При $a = 0$ решение исходного интегрального уравнения можно получить по формуле

$$y(x) = f(x) - \int_0^x R(x-t) f(t)\,dt, \qquad R(x) = \mathfrak{L}^{-1}\bigl[\overline{R}(p)\bigr], \tag{10}$$

где $\mathfrak{L}^{-1}\bigl[\overline{R}(p)\bigr]$ — обратное преобразование Лапласа следующей функции:

$$\overline{R}(p) = \frac{\overline{K}(p)}{1+\overline{K}(p)}, \qquad \overline{K}(p) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p-\lambda_k}. \tag{11}$$

Образ резольвенты $\overline{R}(p)$ можно представить в виде правильной дробно-рациональной функции

$$\overline{R}(p) = \frac{Q(p)}{P(p)}, \qquad P(p) = (p-\mu_1)(p-\mu_2)\ldots(p-\mu_n),$$

где $Q(p)$ — полином относительно p, степень которого меньше n. Корни μ_k полинома $P(p)$ совпадают с корнями уравнения (8). Если все корни μ_k действительны и различны, то резольвента в решении (10) определяется по формуле

$$R(x) = \sum_{k=1}^n B_k e^{\mu_k x}, \qquad B_k = \frac{Q(\mu_k)}{P'(\mu_k)},$$

где штрих обозначает производную.

2.2-2. Ядра содержат степенные и экспоненциальные функции

20. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x x e^{\lambda(x-t)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A\int_a^x x \exp\bigl[\tfrac{1}{2}A(t^2 - x^2) + \lambda(x-t)\bigr] f(t)\,dt.$$

21. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x te^{\lambda(x-t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A\int_a^x t\exp\bigl[\tfrac{1}{2}A(t^2 - x^2) + \lambda(x-t)\bigr]f(t)\,dt.$$

22. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x-t)e^{\lambda t}y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.4 при $g(t) = Ae^{\lambda t}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A}{W}\int_a^x \bigl[u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)\bigr]e^{\lambda t}f(t)\,dt,$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + Ae^{\lambda x}u = 0$, которая выражается через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака параметра A:

$$W = \frac{\lambda}{\pi},\quad u_1(x) = J_0\biggl(\frac{2\sqrt{A}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\biggr),\quad u_2(x) = Y_0\biggl(\frac{2\sqrt{A}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\biggr)\quad \text{при } A > 0,$$

$$W = -\frac{\lambda}{2},\quad u_1(x) = I_0\biggl(\frac{2\sqrt{|A|}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\biggr),\quad u_2(x) = K_0\biggl(\frac{2\sqrt{|A|}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\biggr)\quad \text{при } A < 0.$$

23. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x-t)e^{\lambda(x-t)}y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Решение при $A > 0$:

$$y(x) = f(x) - k\int_a^x e^{\lambda(x-t)}\sin[k(x-t)]f(t)\,dt,\qquad k = \sqrt{A}.$$

2°. Решение при $A < 0$:

$$y(x) = f(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)}\operatorname{sh}[k(x-t)]f(t)\,dt,\qquad k = \sqrt{-A}.$$

24. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x-t)e^{\lambda x+\mu t}y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $u(x) = e^{-\lambda x}y(x)$ приводит к уравнению вида 2.2.22:

$$u(x) + A\int_a^x (x-t)e^{(\lambda+\mu)t}u(t)\,dt = f(x)e^{-\lambda x}.$$

25. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x (Ax + Bt + C)e^{\lambda(x-t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $u(x) = e^{-\lambda x}y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.6:

$$u(x) - \int_a^x (Ax + Bt + C)u(t)\,dt = f(x)e^{-\lambda x}.$$

26. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x x^2e^{\lambda(x-t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A\int_a^x x^2\exp\bigl[\tfrac{1}{3}A(t^3 - x^3) + \lambda(x-t)\bigr]f(t)\,dt.$$

27. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x xte^{\lambda(x-t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A\int_a^x xt\exp\left[\tfrac{1}{3}A(t^3 - x^3) + \lambda(x-t)\right]f(t)\,dt.$$

28. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x t^2e^{\lambda(x-t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A\int_a^x t^2\exp\left[\tfrac{1}{3}A(t^3 - x^3) + \lambda(x-t)\right]f(t)\,dt.$$

29. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x-t)^2e^{\lambda(x-t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t)f(t)\,dt,$$

$$R(x) = \tfrac{2}{3}ke^{(\lambda-2k)x} - \tfrac{2}{3}ke^{(\lambda+k)x}\left[\cos\left(\sqrt{3}\,kx\right) - \sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\,kx\right)\right], \qquad k = \left(\tfrac{1}{4}A\right)^{1/3}.$$

30. $\boldsymbol{y(x) + A\int_0^x (x^2-t^2)e^{\lambda(x-t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $u(x) = e^{-\lambda x}y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.11:

$$u(x) + A\int_0^x (x^2 - t^2)u(t)\,dt = f(x)e^{-\lambda x}.$$

31. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x-t)^ne^{\lambda(x-t)}y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t)f(t)\,dt,$$

$$R(x) = \frac{1}{n+1}e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n}\exp(\sigma_k x)\left[\sigma_k\cos(\beta_k x) - \beta_k\sin(\beta_k x)\right],$$

где

$$\sigma_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}}\cos\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right), \qquad \beta_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}}\sin\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right) \qquad \text{при} \quad A < 0,$$

$$\sigma_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}}\cos\left(\frac{2\pi k + \pi}{n+1}\right), \quad \beta_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}}\sin\left(\frac{2\pi k + \pi}{n+1}\right) \qquad \text{при} \quad A > 0.$$

32. $\boldsymbol{y(x) + b\int_a^x \frac{\exp[\lambda(x-t)]}{\sqrt{x-t}}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = e^{\lambda x}\left\{F(x) + \pi b^2\int_a^x \exp[\pi b^2(x-t)]F(t)\,dt\right\},$$

где

$$F(x) = e^{-\lambda x}f(x) - b\int_a^x \frac{e^{-\lambda t}f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt.$$

33. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x-t)t^k e^{\lambda(x-t)} y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $u(x) = e^{-\lambda x} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.49:

$$u(x) + A\int_a^x (x-t)t^k u(t)\,dt = f(x)e^{-\lambda x}.$$

34. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (x^k - t^k) e^{\lambda(x-t)} y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $u(x) = e^{-\lambda x} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.52:

$$u(x) + A\int_a^x (x^k - t^k) u(t)\,dt = f(x)e^{-\lambda x}.$$

35. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_0^x \frac{e^{\mu(x-t)}}{(x-t)^\alpha} y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \alpha < 1.}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad R(x) = e^{\mu x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bigl[\lambda\Gamma(1-\alpha)x^{1-\alpha}\bigr]^n}{x\Gamma\bigl[n(1-\alpha)\bigr]}.$$

36. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \exp\bigl[\lambda(x^2 - t^2)\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A\int_a^x \exp\bigl[\lambda(x^2 - t^2) - A(x-t)\bigr] f(t)\,dt.$$

37. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \exp\bigl(\lambda x^2 + \beta t^2\bigr) y(t)\,dt = f(x).}$

При $\beta = -\lambda$ см. уравнение 2.2.36. Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A\exp\bigl(\lambda x^2\bigr)$, $h(t) = \exp\bigl(\beta t^2\bigr)$.

38. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty \exp\bigl(-\lambda\sqrt{t-x}\,\bigr) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = A\exp\bigl(-\lambda\sqrt{-x}\,\bigr)$.

39. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \exp\bigl[\lambda(x^\mu - t^\mu)\bigr] y(t)\,dt = f(x), \qquad \mu > 0.}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A\exp\bigl(\lambda x^\mu\bigr)$, $h(t) = \exp\bigl(-\lambda t^\mu\bigr)$.
Решение:

$$y(x) = f(x) - A\int_a^x \exp\bigl[\lambda(x^\mu - t^\mu) - A(x-t)\bigr] f(t)\,dt.$$

40. $\boldsymbol{y(x) + k\int_0^x \frac{1}{x} \exp\Bigl(-\lambda\frac{t}{x}\Bigr) y(t)\,dt = g(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.71 при $f(z) = ke^{-\lambda z}$.

Для правой части полиномиального вида $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} A_n x^n$ решение интегрального уравнения определяется по формуле

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{1 + kB_n} x^n, \qquad B_n = \frac{n!}{\lambda^{n+1}} - e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \frac{1}{\lambda^{n-k+1}}.$$

2.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции

2.3-1. Ядра уравнений содержат гиперболический косинус

1. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{ch}(\lambda x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{ch}(\lambda x)$, $h(t) = 1$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{ch}(\lambda x)\exp\Big\{\frac{A}{\lambda}\big[\operatorname{sh}(\lambda x) - \operatorname{sh}(\lambda t)\big]\Big\}f(t)\,dt.$$

2. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{ch}(\lambda t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \operatorname{ch}(\lambda t)$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{ch}(\lambda t)\exp\Big\{\frac{A}{\lambda}\big[\operatorname{sh}(\lambda x) - \operatorname{sh}(\lambda t)\big]\Big\}f(t)\,dt.$$

3. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.28 при $g(t) = A$. Поэтому решение данного интегрального уравнения сводится к решению линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + Ay'_x - \lambda^2 y = f''_{xx} - \lambda^2 f, \qquad f = f(x),$$

которое следует дополнить начальными условиями

$$y(a) = f(a), \quad y'_x(a) = f'_x(a) - Af(a).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t)f(t)\,dt,$$

$$R(x) = \exp\big(-\tfrac{1}{2}Ax\big)\left[\frac{A^2}{2k}\operatorname{sh}(kx) - A\operatorname{ch}(kx)\right], \quad k = \sqrt{\lambda^2 + \tfrac{1}{4}A^2}.$$

4. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \Big\{\sum_{k=1}^n A_k \operatorname{ch}[\lambda_k(x-t)]\Big\}y(t)\,dt = f(x).}$

Это уравнение приводится к уравнению вида 2.2.19 путем замены гиперболических функций на экспоненциальные с помощью формулы $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\big(e^z + e^{-z}\big)$. Поэтому рассматриваемое интегральное уравнение можно свести к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению $2n$-го порядка с постоянными коэффициентами.

5. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{ch}(\lambda x)}{\operatorname{ch}(\lambda t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\operatorname{ch}(\lambda x)}{\operatorname{ch}(\lambda t)}f(t)\,dt.$$

6. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{ch}(\lambda t)}{\operatorname{ch}(\lambda x)}\, y(t)\, dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\operatorname{ch}(\lambda t)}{\operatorname{ch}(\lambda x)} f(t)\, dt.$$

7. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda x)\operatorname{ch}^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{ch}^k(\lambda x)$, $h(t) = \operatorname{ch}^m(\mu t)$.

8. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x t\operatorname{ch}[\lambda(x-t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.28 при $g(t) = At$.

9. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x t^k\operatorname{ch}^m(\lambda x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A\operatorname{ch}^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

10. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x x^k\operatorname{ch}^m(\lambda t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \operatorname{ch}^m(\lambda t)$.

11. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \big[A\operatorname{ch}(kx) + B - AB(x-t)\operatorname{ch}(kx)\big] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A\operatorname{ch}(kx)$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t) f(t)\, dt,$$

$$R(x,t) = [A\operatorname{ch}(kx) + B]\frac{G(x)}{G(t)} + \frac{B^2}{G(t)}\int_t^x e^{B(x-s)} G(s)\, ds, \quad G(x) = \exp\left[\frac{A}{k}\operatorname{sh}(kx)\right].$$

12. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \big[A\operatorname{ch}(kt) + B + AB(x-t)\operatorname{ch}(kt)\big] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A\operatorname{ch}(kt)$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t) f(t)\, dt,$$

$$R(x,t) = -[A\operatorname{ch}(kt) + B]\frac{G(t)}{G(x)} + \frac{B^2}{G(x)}\int_t^x e^{B(t-s)} G(s)\, ds, \quad G(x) = \exp\left[\frac{A}{k}\operatorname{sh}(kx)\right].$$

13. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty \operatorname{ch}\big(\lambda\sqrt{t-x}\big) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = A\operatorname{ch}\big(\lambda\sqrt{-x}\big)$.

2.3-2. Ядра уравнений содержат гиперболический синус

14. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{sh}(\lambda x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{sh}(\lambda x)$, $h(t) = 1$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{sh}(\lambda x)\exp\left\{\frac{A}{\lambda}\big[\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)\big]\right\} f(t)\, dt.$$

15. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{sh}(\lambda t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \operatorname{sh}(\lambda t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{sh}(\lambda t)\exp\left\{\frac{A}{\lambda}\bigl[\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)\bigr]\right\} f(t)\,dt.$$

16. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.30 при $g(x) = A$.

1°. Решение при $\lambda(A-\lambda) > 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k}\int_a^x \sin[k(x-t)] f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad k = \sqrt{\lambda(A-\lambda)}.$$

2°. Решение при $\lambda(A-\lambda) < 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k}\int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)] f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad k = \sqrt{\lambda(\lambda-A)}.$$

3°. Решение при $A = \lambda$:

$$y(x) = f(x) - \lambda^2\int_a^x (x-t) f(t)\,dt.$$

17. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \operatorname{sh}^3[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x).}$

Используя формулу $\operatorname{sh}^3\beta = \frac{1}{4}\operatorname{sh}3\beta - \frac{3}{4}\operatorname{sh}\beta$, приходим к уравнению вида 2.3.18:

$$y(x) + \int_a^x \bigl\{\tfrac{1}{4}A\operatorname{sh}\bigl[3\lambda(x-t)\bigr] - \tfrac{3}{4}A\operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\bigr\} y(t)\,dt = f(x).$$

18. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl\{A_1\operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)] + A_2\operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)]\bigr\} y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Введем обозначения

$$I_1 = \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)] y(t)\,dt, \quad I_2 = \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)] y(t)\,dt,$$
$$J_1 = \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda_1(x-t)] y(t)\,dt, \quad J_2 = \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda_2(x-t)] y(t)\,dt.$$

Продифференцируем последовательно интегральное уравнение четыре раза. В результате имеем (первым записано исходное уравнение)

$$y + A_1 I_1 + A_2 I_2 = f, \qquad f = f(x), \tag{1}$$
$$y'_x + A_1\lambda_1 J_1 + A_2\lambda_2 J_2 = f'_x, \tag{2}$$
$$y''_{xx} + (A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2)y + A_1\lambda_1^2 I_1 + A_2\lambda_2^2 I_2 = f''_{xx}, \tag{3}$$
$$y'''_{xxx} + (A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2)y'_x + A_1\lambda_1^3 J_1 + A_2\lambda_2^3 J_2 = f'''_{xxx}, \tag{4}$$
$$y''''_{xxxx} + (A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2)y''_{xx} + (A_1\lambda_1^3 + A_2\lambda_2^3)y + A_1\lambda_1^4 I_1 + A_2\lambda_2^4 I_2 = f''''_{xxxx}. \tag{5}$$

Исключая из равенств (1), (3), (5) величины I_1 и I_2, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{gathered} y''''_{xxxx} - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - A_1\lambda_1 - A_2\lambda_2)y''_{xx} + (\lambda_1^2\lambda_2^2 - A_1\lambda_1\lambda_2^2 - A_2\lambda_1^2\lambda_2)y = \\ f''''_{xxxx} - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)f''_{xx} + \lambda_1^2\lambda_2^2 f. \end{gathered} \tag{6}$$

Подставляя значение $x = a$ в равенства (1)–(4), получим начальные условия

$$\begin{aligned} &y(a) = f(a), \quad y'_x(a) = f'_x(a), \\ &y''_{xx}(a) = f''_{xx}(a) - (A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2)f(a), \\ &y'''_{xxx}(a) = f'''_{xxx}(a) - (A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2)f'_x(a). \end{aligned} \tag{7}$$

Решение дифференциального уравнения (6) с условиями (7) позволяет найти решение интегрального уравнения.

2°. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$z^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - A_1\lambda_1 - A_2\lambda_2)z + \lambda_1^2\lambda_2^2 - A_1\lambda_1\lambda_2^2 - A_2\lambda_1^2\lambda_2 = 0, \tag{8}$$

корни которого z_1 и z_2 определяют структуру решения интегрального уравнения.

Будем считать, что дискриминант уравнения (8) положителен:

$$D \equiv (A_1\lambda_1 - A_2\lambda_2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 + 4A_1A_2\lambda_1\lambda_2 > 0.$$

В этом случае квадратное уравнение (8) имеет действительные (и различные) корни z_1 и z_2:

$$z_1 = \tfrac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - A_1\lambda_1 - A_2\lambda_2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{D}, \quad z_2 = \tfrac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - A_1\lambda_1 - A_2\lambda_2) - \tfrac{1}{2}\sqrt{D}.$$

В зависимости от знаков корней z_1 и z_2 возможны три ситуации.

Случай 1. При $z_1 > 0$ и $z_2 > 0$ решение интегрального уравнения имеет следующий вид ($i = 1, 2$):

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \bigl\{B_1 \operatorname{sh}[\mu_1(x-t)] + B_2 \operatorname{sh}\bigl[\mu_2(x-t)\bigr]\bigr\} f(t)\,dt, \qquad \mu_i = \sqrt{z_i},$$

где коэффициенты B_1 и B_2 определяются по формулам

$$B_1 = A_1\frac{\lambda_1(\mu_1^2 - \lambda_2^2)}{\mu_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)} + A_2\frac{\lambda_2(\mu_1^2 - \lambda_1^2)}{\mu_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}, \quad B_2 = A_1\frac{\lambda_1(\mu_2^2 - \lambda_2^2)}{\mu_2(\mu_1^2 - \mu_2^2)} + A_2\frac{\lambda_2(\mu_2^2 - \lambda_1^2)}{\mu_2(\mu_1^2 - \mu_2^2)}.$$

Случай 2. При $z_1 < 0$ и $z_2 < 0$ решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \bigl\{B_1 \sin[\mu_1(x-t)] + B_2 \sin\bigl[\mu_2(x-t)\bigr]\bigr\} f(t)\,dt, \qquad \mu_i = \sqrt{|z_i|},$$

где коэффициенты B_1 и B_2 определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{B_1\mu_1}{\lambda_1^2 + \mu_1^2} + \frac{B_2\mu_2}{\lambda_1^2 + \mu_2^2} + 1 = 0, \qquad \frac{B_1\mu_1}{\lambda_2^2 + \mu_1^2} + \frac{B_2\mu_2}{\lambda_2^2 + \mu_2^2} + 1 = 0.$$

Случай 3. При $z_1 > 0$ и $z_2 < 0$ решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \bigl\{B_1 \operatorname{sh}[\mu_1(x-t)] + B_2 \sin\bigl[\mu_2(x-t)\bigr]\bigr\} f(t)\,dt, \qquad \mu_i = \sqrt{|z_i|},$$

где коэффициенты B_1 и B_2 определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{B_1\mu_1}{\lambda_1^2 - \mu_1^2} + \frac{B_2\mu_2}{\lambda_1^2 + \mu_2^2} + 1 = 0, \qquad \frac{B_1\mu_1}{\lambda_2^2 - \mu_1^2} + \frac{B_2\mu_2}{\lambda_2^2 + \mu_2^2} + 1 = 0.$$

19. $\displaystyle y(x) + \int_a^x \biggl\{\sum_{k=1}^n A_k \operatorname{sh}[\lambda_k(x-t)]\biggr\} y(t)\,dt = f(x).$

1°. Это уравнение приводится к уравнению вида 2.2.19 путем замены гиперболических функций на экспоненциальные по формуле $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\bigl(e^z - e^{-z}\bigr)$. Поэтому рассматриваемое интегральное уравнение можно привести к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению $2n$-го порядка с постоянными коэффициентами.

2°. Найдем корни z_k алгебраического уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k A_k}{z-\lambda_k^2} + 1 = 0, \tag{1}$$

которое после приведения к общему знаменателю сводится к задаче об определении корней характеристического многочлена n-й степени.

Пусть все корни z_k уравнения (1) действительны, различны и не равны нулю. Все корни в зависимости от их знака разобьем на две группы:

$$\begin{array}{llll} z_1 > 0, & z_2 > 0, & \ldots, & z_s > 0 \quad \text{(положительные корни);} \\ z_{s+1} < 0, & z_{s+2} < 0, & \ldots, & z_n < 0 \quad \text{(отрицательные корни).} \end{array}$$

Решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$y(x)=f(x)+\int_a^x \Biggl\{\sum_{k=1}^{s} B_k \operatorname{sh}\bigl[\mu_k(x-t)\bigr] + \sum_{k=s+1}^{n} C_k \sin\bigl[\mu_k(x-t)\bigr]\Biggr\} f(t)\,dt, \quad \mu_k=\sqrt{|z_k|}. \tag{2}$$

Коэффициенты B_k и C_k находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{s} \frac{B_k\mu_k}{\lambda_m^2-\mu_k^2} + \sum_{k=s+1}^{n} \frac{C_k\mu_k}{\lambda_m^2+\mu_k^2} + 1 = 0, \qquad \mu_k=\sqrt{|z_k|}, \quad m=1,\ldots,n. \tag{3}$$

Случай с нулевым корнем $z_s=0$ рассматривается с помощью введения новой постоянной $D=B_s\mu_s$ и предельного перехода $\mu_s\to 0$. В результате в решении (2) вместо члена $B_s \operatorname{sh}\bigl[\mu_s(x-t)\bigr]$ возникает слагаемое $D(x-t)$, а в системе (3) появляются соответствующие слагаемые $D\lambda_m^{-2}$.

20. $\displaystyle y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\operatorname{sh}(\lambda t)}\, y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x)=f(x)+A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\operatorname{sh}(\lambda t)} f(t)\,dt.$$

21. $\displaystyle y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{sh}(\lambda t)}{\operatorname{sh}(\lambda x)}\, y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x)=f(x)+A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\operatorname{sh}(\lambda t)}{\operatorname{sh}(\lambda x)} f(t)\,dt.$$

22. $\displaystyle y(x) - A\int_a^x \operatorname{sh}^k(\lambda x)\operatorname{sh}^m(\mu t)\, y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x)=A\operatorname{sh}^k(\lambda x)$, $h(t)=\operatorname{sh}^m(\mu t)$.

23. $\displaystyle y(x) + A\int_a^x t\operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\, y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.30 при $g(t)=At$.
Решение:

$$y(x)=f(x)+\frac{A\lambda}{W}\int_a^x t\bigl[u_1(x)u_2(t)-u_2(x)u_1(t)\bigr] f(t)\,dt,$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx}+\lambda(Ax-\lambda)u=0$, а W —

определитель Вронского. Функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ в зависимости от знака произведения $A\lambda$ выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя.

При $A\lambda > 0$ имеем

$$u_1(x) = \xi^{1/2} J_{1/3}\big(\tfrac{2}{3}\sqrt{A\lambda}\,\xi^{3/2}\big), \quad u_2(x) = \xi^{1/2} Y_{1/3}\big(\tfrac{2}{3}\sqrt{A\lambda}\,\xi^{3/2}\big),$$
$$W = 3/\pi, \quad \xi = x - (\lambda/A).$$

При $A\lambda < 0$ имеем

$$u_1(x) = \xi^{1/2} I_{1/3}\big(\tfrac{2}{3}\sqrt{-A\lambda}\,\xi^{3/2}\big), \quad u_2(x) = \xi^{1/2} K_{1/3}\big(\tfrac{2}{3}\sqrt{-A\lambda}\,\xi^{3/2}\big),$$
$$W = -\tfrac{3}{2}, \quad \xi = x - (\lambda/A).$$

24. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x x\,\mathrm{sh}[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.31 при $g(x) = Ax$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A\lambda}{W}\int_a^x x\big[u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)\big]f(t)\,dt,$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + \lambda(Ax - \lambda)u = 0$, а W — определитель Вронского.

Функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ и W указаны в 2.3.23.

25. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x t^k\,\mathrm{sh}^m(\lambda x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A\,\mathrm{sh}^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

26. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x x^k\,\mathrm{sh}^m(\lambda t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \mathrm{sh}^m(\lambda t)$.

27. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \big[A\,\mathrm{sh}(kx) + B - AB(x-t)\,\mathrm{sh}(kx)\big]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A\,\mathrm{sh}(kx)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = [A\,\mathrm{sh}(kx) + B]\frac{G(x)}{G(t)} + \frac{B^2}{G(t)}\int_t^x e^{B(x-s)}G(s)\,ds, \quad G(x) = \exp\left[\frac{A}{k}\,\mathrm{ch}(kx)\right].$$

28. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \big[A\,\mathrm{sh}(kt) + B + AB(x-t)\,\mathrm{sh}(kt)\big]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A\,\mathrm{sh}(kt)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = -[\mathrm{sh}(kt) + B]\frac{G(t)}{G(x)} + \frac{B^2}{G(x)}\int_t^x e^{B(t-s)}G(s)\,ds, \quad G(x) = \exp\left[\frac{A}{k}\,\mathrm{ch}(kx)\right].$$

29. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty \operatorname{sh}\big(\lambda\sqrt{t-x}\,\big)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = A\operatorname{sh}\big(\lambda\sqrt{-x}\big)$.

2.3-3. Ядра уравнений содержат гиперболический тангенс

30. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{th}(\lambda x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{th}(\lambda x)$, $h(t) = 1$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{th}(\lambda x)\left[\frac{\operatorname{ch}(\lambda x)}{\operatorname{ch}(\lambda t)}\right]^{A/\lambda} f(t)\,dt.$$

31. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{th}(\lambda t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \operatorname{th}(\lambda t)$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{th}(\lambda t)\left[\frac{\operatorname{ch}(\lambda x)}{\operatorname{ch}(\lambda t)}\right]^{A/\lambda} f(t)\,dt.$$

32. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \big[\operatorname{th}(\lambda x) - \operatorname{th}(\lambda t)\big]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.5 при $g(x) = A\operatorname{th}(\lambda x)$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W}\int_a^x \big[Y_1'(x)Y_2'(t) - Y_2'(x)Y_1'(t)\big]f(t)\,dt,$$

где $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $\operatorname{ch}^2(\lambda x)Y_{xx}'' + A\lambda Y = 0$, W — определитель Вронского, штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках.

Из книг А. Д. Полянина, В. Ф. Зайцева (1995, 1997) следует, что $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ можно представить в виде

$$Y_1(x) = F\Big(\alpha, \beta, 1;\ \frac{e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}}\Big), \quad Y_2(x) = Y_1(x)\int_a^x \frac{d\xi}{Y_1^2(\xi)}, \quad W = 1,$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция, параметры α, β которой определяются путем решения системы алгебраических уравнений: $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -A/\lambda$.

33. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{th}(\lambda x)}{\operatorname{th}(\lambda t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\operatorname{th}(\lambda x)}{\operatorname{th}(\lambda t)}f(t)\,dt.$$

34. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{th}(\lambda t)}{\operatorname{th}(\lambda x)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\operatorname{th}(\lambda t)}{\operatorname{th}(\lambda x)}f(t)\,dt.$$

35. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda x)\operatorname{th}^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{th}^k(\lambda x)$, $h(t) = \operatorname{th}^m(\mu t)$.

36. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x t^k\operatorname{th}^m(\lambda x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A\operatorname{th}^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

37. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x x^k\operatorname{th}^m(\lambda t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \operatorname{th}^m(\lambda t)$.

38. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty \operatorname{th}[\lambda(t-x)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(z) = A\operatorname{th}(-\lambda z)$.

39. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty \operatorname{th}\bigl(\lambda\sqrt{t-x}\,\bigr)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(z) = A\operatorname{th}\bigl(\lambda\sqrt{-z}\bigr)$.

40. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \bigl[A\operatorname{th}(kx) + B - AB(x-t)\operatorname{th}(kx)\bigr]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A\operatorname{th}(kx)$.

41. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl[A\operatorname{th}(kt) + B + AB(x-t)\operatorname{th}(kt)\bigr]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A\operatorname{th}(kt)$.

2.3-4. Ядра уравнений содержат гиперболический котангенс

42. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{cth}(\lambda x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{cth}(\lambda x)$, $h(t) = 1$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{cth}(\lambda x)\left[\frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\operatorname{sh}(\lambda t)}\right]^{A/\lambda} f(t)\,dt.$$

43. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{cth}(\lambda t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \operatorname{cth}(\lambda t)$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{cth}(\lambda t)\left[\frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\operatorname{sh}(\lambda t)}\right]^{A/\lambda} f(t)\,dt.$$

44. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{cth}(\lambda t)}{\operatorname{cth}(\lambda x)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\operatorname{cth}(\lambda t)}{\operatorname{cth}(\lambda x)} f(t)\,dt.$$

45. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{cth}(\lambda x)}{\operatorname{cth}(\lambda t)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{cth}(\lambda x)}{\operatorname{cth}(\lambda t)} f(t)\,dt.$$

46. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{cth}^k(\lambda x)\operatorname{cth}^m(\mu t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{cth}^k(\lambda x)$, $h(t) = \operatorname{cth}^m(\mu t)$.

47. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x t^k \operatorname{cth}^m(\lambda x) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A\operatorname{cth}^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

48. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x x^k \operatorname{cth}^m(\lambda t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \operatorname{cth}^m(\lambda t)$.

49. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty \operatorname{cth}[\lambda(t-x)] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(z) = A\operatorname{cth}(-\lambda z)$.

50. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty \operatorname{cth}\bigl(\lambda\sqrt{t-x}\,\bigr) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(z) = A\operatorname{cth}\bigl(\lambda\sqrt{-z}\,\bigr)$.

51. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \bigl[A\operatorname{cth}(kx) + B - AB(x-t)\operatorname{cth}(kx)\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A\operatorname{cth}(kx)$.

52. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl[A\operatorname{cth}(kt) + B + AB(x-t)\operatorname{cth}(kt)\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A\operatorname{cth}(kt)$.

2.3-5. Ядра уравнений содержат комбинации гиперболических функций

53. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda x)\operatorname{sh}^m(\mu t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{ch}^k(\lambda x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^m(\mu t)$.

54. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \{A + B\operatorname{ch}(\lambda x) + B(x-t)[\lambda\operatorname{sh}(\lambda x) - A\operatorname{ch}(\lambda x)]\} y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.32 при $b = B$, $g(x) = A$.

55. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \{A + B\operatorname{sh}(\lambda x) + B(x-t)[\lambda\operatorname{ch}(\lambda x) - A\operatorname{sh}(\lambda x)]\} y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.33 при $b = B$, $g(x) = A$.

56. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda x)\operatorname{cth}^m(\mu t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{th}^k(\lambda x)$, $h(t) = \operatorname{cth}^m(\mu t)$.

2.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции

2.4-1. Ядра содержат только логарифмические функции

1. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \ln(\lambda x) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\ln(\lambda x)$, $h(t) = 1$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \ln(\lambda x) e^{-A(x-t)}\,\frac{(\lambda x)^{Ax}}{(\lambda t)^{At}}\,f(t)\,dt.$$

2. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \ln(\lambda t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \ln(\lambda t)$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \ln(\lambda t) e^{-A(x-t)}\,\frac{(\lambda x)^{Ax}}{(\lambda t)^{At}}\,f(t)\,dt.$$

3. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x (\ln x - \ln t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.5 при $g(x) = A\ln x$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W}\int_a^x \bigl[u_1'(x)u_2'(t) - u_2'(x)u_1'(t)\bigr] f(t)\,dt,$$

где штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках, $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + Ax^{-1}u = 0$, которая выражается через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака параметра A:

$$\begin{aligned}
&W = \tfrac{1}{\pi}, && u_1(x) = \sqrt{x}\,J_1\bigl(2\sqrt{Ax}\,\bigr), && u_2(x) = \sqrt{x}\,Y_1\bigl(2\sqrt{Ax}\,\bigr) && \text{при } A > 0,\\
&W = -\tfrac{1}{2}, && u_1(x) = \sqrt{x}\,I_1\bigl(2\sqrt{-Ax}\,\bigr), && u_2(x) = \sqrt{x}\,K_1\bigl(2\sqrt{-Ax}\,\bigr) && \text{при } A < 0.
\end{aligned}$$

4. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\ln(\lambda x)}{\ln(\lambda t)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\,\frac{\ln(\lambda x)}{\ln(\lambda t)}\,f(t)\,dt.$$

5. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\ln(\lambda t)}{\ln(\lambda x)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\,\frac{\ln(\lambda t)}{\ln(\lambda x)}\,f(t)\,dt.$$

6. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \ln^k(\lambda x)\ln^m(\mu t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\ln^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

7. $\boldsymbol{y(x)+a\int_x^\infty \ln(t-x)y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x)=a\ln(-x)$.

Для правой части $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}A_k\exp(-\lambda_k x)$, где $\lambda_k>0$, решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{B_k}\exp(-\lambda_k x),\qquad B_k=1-\frac{a}{\lambda_k}(\ln\lambda_k+\mathcal{C}),$$

где $\mathcal{C}=0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера.

8. $\boldsymbol{y(x)+a\int_x^\infty \ln^2(t-x)y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x)=a\ln^2(-x)$.

Для правой части $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}A_k\exp(-\lambda_k x)$, где $\lambda_k>0$, решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{B_k}\exp(-\lambda_k x),\qquad B_k=1+\frac{a}{\lambda_k}\bigl[\tfrac{1}{6}\pi^2+(\ln\lambda_k+\mathcal{C})^2\bigr],$$

где $\mathcal{C}=0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера.

2.4-2. Ядра содержат степенные и логарифмические функции

9. $\boldsymbol{y(x)-A\int_a^x x^k\ln^m(\lambda t)y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x)=Ax^k$, $h(t)=\ln^m(\lambda t)$.

10. $\boldsymbol{y(x)-A\int_a^x t^k\ln^m(\lambda x)y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x)=A\ln^m(\lambda x)$, $h(t)=t^k$.

11. $\boldsymbol{y(x)-\int_a^x\bigl[A\ln(kx)+B-AB(x-t)\ln(kx)\bigr]y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda=B$, $g(x)=A\ln(kx)$.

12. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^x\bigl[A\ln(kt)+B+AB(x-t)\ln(kt)\bigr]y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda=B$, $g(t)=A\ln(kt)$.

13. $\boldsymbol{y(x)+a\int_x^\infty (t-x)^n\ln(t-x)y(t)\,dt=f(x),\qquad n=1,2,\ldots}$

Для правой части $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}A_k\exp(-\lambda_k x)$, где $\lambda_k>0$, решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{B_k}\exp(-\lambda_k x),\qquad B_k=1+\frac{an!}{\lambda_k^{n+1}}\bigl(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{n}-\ln\lambda_k-\mathcal{C}\bigr),$$

где $\mathcal{C}=0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера.

14. $\boldsymbol{y(x) + a\int_x^\infty \frac{\ln(t-x)}{\sqrt{t-x}}\, y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(-x) = ax^{-1/2}\ln x$.

Для правой части $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} A_k \exp(-\lambda_k x)$, где $\lambda_k > 0$, решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{B_k} \exp(-\lambda_k x), \qquad B_k = 1 - a\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_k}}\bigl[\ln(4\lambda_k) + \mathcal{C}\bigr],$$

где $\mathcal{C} = 0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера.

2.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции

2.5-1. Ядра уравнений содержат косинус

1. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \cos(\lambda x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\cos(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \cos(\lambda x) \exp\Bigl\{\frac{A}{\lambda}\bigl[\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)\bigr]\Bigr\} f(t)\, dt.$$

2. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \cos(\lambda t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \cos(\lambda t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \cos(\lambda t) \exp\Bigl\{\frac{A}{\lambda}\bigl[\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)\bigr]\Bigr\} f(t)\, dt.$$

3. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \cos[\lambda(x-t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.34 при $g(t) = A$. Поэтому решение данного интегрального уравнения сводится к решению линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + Ay'_x + \lambda^2 y = f''_{xx} + \lambda^2 f, \qquad f = f(x),$$

которое следует дополнить начальными условиями

$$y(a) = f(a), \quad y'_x(a) = f'_x(a) - Af(a).$$

1°. Решение при $|A| > 2|\lambda|$:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt,$$

$$R(x) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}Ax\bigr)\left[\frac{A^2}{2k}\operatorname{sh}(kx) - A\operatorname{ch}(kx)\right], \quad k = \sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 - \lambda^2}.$$

2°. Решение при $|A| < 2|\lambda|$:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t)\, dt,$$

$$R(x) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}Ax\bigr)\left[\frac{A^2}{2k}\sin(kx) - A\cos(kx)\right], \quad k = \sqrt{\lambda^2 - \tfrac{1}{4}A^2}.$$

3°. Решение при $\lambda = \pm\frac{1}{2}A$:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t)f(t)\,dt, \qquad R(x) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}Ax\bigr)\bigl(\tfrac{1}{2}A^2x - A\bigr).$$

4. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \Bigl\{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos[\lambda_k(x-t)]\Bigr\} y(t)\,dt = f(x).}$

Это интегральное уравнение приводится к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению $2n$-го порядка с постоянными коэффициентами. Обозначим

$$I_k(x) = \int_a^x \cos[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt. \tag{1}$$

Продифференцируем (1) дважды по x. В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$\begin{aligned} I_k' &= y(x) - \lambda_k \int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt, \\ I_k'' &= y_x'(x) - \lambda_k^2 \int_a^x \cos[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I_k'' и I_k:

$$I_k'' = y_x'(x) - \lambda_k^2 I_k, \qquad I_k = I_k(x). \tag{3}$$

Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$y(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k I_k = f(x). \tag{4}$$

Дифференцируя (4) дважды по x, с учетом равенств (3) имеем

$$y_{xx}''(x) + \sigma_n y_x'(x) - \sum_{k=1}^{n} A_k \lambda_k^2 I_k = f_{xx}''(x), \qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} A_k. \tag{5}$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$y_{xx}''(x) + \sigma_n y_x'(x) + \lambda_n^2 y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(\lambda_n^2 - \lambda_k^2)I_k = f_{xx}''(x) + \lambda_n^2 f(x). \tag{6}$$

Продифференцировав равенство (6) дважды по x и исключив интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор четвертого порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum\limits_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования и формулы (3) последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, …, придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2n$.

Граничные условия для функции $y(x)$ находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования.

5. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\lambda t)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\lambda t)} f(t)\,dt.$$

6. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\cos(\lambda t)}{\cos(\lambda x)}\, y(t)\, dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\cos(\lambda t)}{\cos(\lambda x)}\, f(t)\, dt.$$

7. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \cos^k(\lambda x)\cos^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\cos^k(\lambda x)$, $h(t) = \cos^m(\mu t)$.

8. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x t\cos[\lambda(x-t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.34 при $g(t) = At$.

9. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x t^k \cos^m(\lambda x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A\cos^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

10. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x x^k \cos^m(\lambda t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \cos^m(\lambda t)$.

11. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \big[A\cos(kx) + B - AB(x-t)\cos(kx)\big] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A\cos(kx)$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t) f(t)\, dt,$$

$$R(x,t) = [A\cos(kx) + B]\frac{G(x)}{G(t)} + \frac{B^2}{G(t)}\int_t^x e^{B(x-s)} G(s)\, ds, \quad G(x) = \exp\left[\frac{A}{k}\sin(kx)\right].$$

12. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \big[A\cos(kt) + B + AB(x-t)\cos(kt)\big] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A\cos(kt)$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t) f(t)\, dt,$$

$$R(x,t) = -[A\cos(kt) + B]\frac{G(t)}{G(x)} + \frac{B^2}{G(x)}\int_t^x e^{B(t-s)} G(s)\, ds, \quad G(x) = \exp\left[\frac{A}{k}\sin(kx)\right].$$

13. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty \cos\big(\lambda\sqrt{t-x}\big) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = A\cos\big(\lambda\sqrt{-x}\big)$.

2.5-2. Ядра уравнений содержат синус

14. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \sin(\lambda x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\sin(\lambda x)$, $h(t) = 1$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \sin(\lambda x)\exp\Big\{\frac{A}{\lambda}\big[\cos(\lambda t) - \cos(\lambda x)\big]\Big\} f(t)\, dt.$$

15. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \sin(\lambda t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \sin(\lambda t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \sin(\lambda t) \exp\Bigl\{\frac{A}{\lambda}\bigl[\cos(\lambda t) - \cos(\lambda x)\bigr]\Bigr\} f(t)\,dt.$$

16. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \sin[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.36 при $g(t) = A$.

1°. Решение при $\lambda(A+\lambda) > 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k}\int_a^x \sin[k(x-t)] f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad k = \sqrt{\lambda(A+\lambda)}.$$

2°. Решение при $\lambda(A+\lambda) < 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k}\int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)] f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad k = \sqrt{-\lambda(\lambda+A)}.$$

3°. Решение при $A = -\lambda$:

$$y(x) = f(x) + \lambda^2\int_a^x (x-t) f(t)\,dt.$$

17. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \sin^3[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x).}$

Используя формулу $\sin^3\beta = -\frac{1}{4}\sin 3\beta + \frac{3}{4}\sin\beta$, приходим к уравнению вида 2.5.18:

$$y(x) + \int_a^x \bigl\{-\tfrac{1}{4}A\sin[3\lambda(x-t)] + \tfrac{3}{4}A\sin[\lambda(x-t)]\bigr\} y(t)\,dt = f(x).$$

18. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl\{A_1\sin[\lambda_1(x-t)] + A_2\sin[\lambda_2(x-t)]\bigr\} y(t)\,dt = f(x).}$

Это уравнение решается таким же методом, что и уравнение 2.3.18, — путем сведения к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$z^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2)z + \lambda_1^2\lambda_2^2 + A_1\lambda_1\lambda_2^2 + A_2\lambda_1^2\lambda_2 = 0, \tag{1}$$

корни которого z_1 и z_2 определяют структуру решения интегрального уравнения.

Будем считать, что дискриминант уравнения (1) положителен:

$$D \equiv (A_1\lambda_1 - A_2\lambda_2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 + 4A_1A_2\lambda_1\lambda_2 > 0.$$

В этом случае квадратное уравнение (1) имеет действительные (и различные) корни z_1 и z_2:

$$z_1 = -\tfrac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{D}, \quad z_2 = -\tfrac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2) - \tfrac{1}{2}\sqrt{D}.$$

В зависимости от знаков корней z_1 и z_2 возможны три ситуации.

Случай 1. При $z_1 > 0$ и $z_2 > 0$ решение интегрального уравнения имеет следующий вид ($i = 1, 2$):

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \bigl\{B_1\operatorname{sh}[\mu_1(x-t)] + B_2\operatorname{sh}\bigl[\mu_2(x-t)\bigr]\bigr\} f(t)\,dt, \qquad \mu_i = \sqrt{z_i},$$

где коэффициенты B_1 и B_2 определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{B_1\mu_1}{\lambda_1^2+\mu_1^2}+\frac{B_2\mu_2}{\lambda_1^2+\mu_2^2}-1=0, \qquad \frac{B_1\mu_1}{\lambda_2^2+\mu_1^2}+\frac{B_2\mu_2}{\lambda_2^2+\mu_2^2}-1=0.$$

Случай 2. При $z_1<0$ и $z_2<0$ решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x)=f(x)+\int_a^x\bigl\{B_1\sin[\mu_1(x-t)]+B_2\sin\bigl[\mu_2(x-t)\bigr]\bigr\}f(t)\,dt, \qquad \mu_i=\sqrt{|z_i|},$$

где коэффициенты B_1 и B_2 определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{B_1\mu_1}{\lambda_1^2-\mu_1^2}+\frac{B_2\mu_2}{\lambda_1^2-\mu_2^2}-1=0, \qquad \frac{B_1\mu_1}{\lambda_2^2-\mu_1^2}+\frac{B_2\mu_2}{\lambda_2^2-\mu_2^2}-1=0.$$

Случай 3. При $z_1>0$ и $z_2<0$ решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x)=f(x)+\int_a^x\bigl\{B_1\,\mathrm{sh}[\mu_1(x-t)]+B_2\sin\bigl[\mu_2(x-t)\bigr]\bigr\}f(t)\,dt, \qquad \mu_i=\sqrt{|z_i|},$$

где коэффициенты B_1 и B_2 определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{B_1\mu_1}{\lambda_1^2+\mu_1^2}+\frac{B_2\mu_2}{\lambda_1^2-\mu_2^2}-1=0, \qquad \frac{B_1\mu_1}{\lambda_2^2+\mu_1^2}+\frac{B_2\mu_2}{\lambda_2^2-\mu_2^2}-1=0.$$

Замечание. Решение исходного интегрального уравнения можно получить из решения уравнения 2.3.18, заменив в нем параметры по правилу

$$\lambda_k\to i\lambda_k, \quad \mu_k\to i\mu_k, \quad A_k\to -iA_k, \quad B_k\to -iB_k, \qquad i^2=-1 \quad (k=1,2).$$

19. $y(x)+\displaystyle\int_a^x\Bigl\{\sum_{k=1}^n A_k\sin[\lambda_k(x-t)]\Bigr\}y(t)\,dt=f(x)$.

1°. Это интегральное уравнение можно свести к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению $2n$-го порядка с постоянными коэффициентами. Обозначим

$$I_k(x)=\int_a^x\sin[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt. \tag{1}$$

Продифференцируем (1) дважды по x. В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$I_k'=\lambda_k\int_a^x\cos[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt, \qquad I_k''=\lambda_k y(x)-\lambda_k^2\int_a^x\sin[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt. \tag{2}$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I_k'' и I_k:

$$I_k''=\lambda_k y(x)-\lambda_k^2 I_k, \qquad I_k=I_k(x). \tag{3}$$

Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$y(x)+\sum_{k=1}^n A_k I_k=f(x). \tag{4}$$

Дифференцируя (4) дважды по x, с учетом равенств (3) имеем

$$y_{xx}''(x)+\sigma_n y(x)-\sum_{k=1}^n A_k\lambda_k^2 I_k=f_{xx}''(x), \qquad \sigma_n=\sum_{k=1}^n A_k\lambda_k. \tag{5}$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$y''_{xx}(x) + (\sigma_n + \lambda_n^2)y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(\lambda_n^2 - \lambda_k^2)I_k = f''_{xx}(x) + \lambda_n^2 f(x). \qquad (6)$$

Дифференцируя равенство (6) дважды по x и исключая интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор четвертого порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования и соотношения (3) последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, …, придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2n$.

Начальные условия для функции $y(x)$ находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования.

2°. Найдем корни z_k алгебраического уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k A_k}{z + \lambda_k^2} + 1 = 0, \qquad (7)$$

которое после приведения к общему знаменателю сводится к задаче об определении корней характеристического многочлена n-й степени.

Пусть все корни z_k уравнения (7) действительны, различны и не равны нулю. Все корни в зависимости от их знака разобьем на две группы:

$$\begin{aligned} &z_1 > 0, \quad z_2 > 0, \quad \dots, \quad z_s > 0 \quad &&\text{(положительные корни);}\\ &z_{s+1} < 0, \quad z_{s+2} < 0, \quad \dots, \quad z_n < 0 \quad &&\text{(отрицательные корни).}\end{aligned}$$

Решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \biggl\{ \sum_{k=1}^{s} B_k \operatorname{sh}\bigl[\mu_k(x-t)\bigr] + \sum_{k=s+1}^{n} C_k \sin\bigl[\mu_k(x-t)\bigr] \biggr\} f(t)\,dt, \quad \mu_k = \sqrt{|z_k|}. \qquad (8)$$

Коэффициенты B_k и C_k находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{s} \frac{B_k \mu_k}{\lambda_m^2 + \mu_k^2} + \sum_{k=s+1}^{n} \frac{C_k \mu_k}{\lambda_m^2 - \mu_k^2} - 1 = 0, \qquad \mu_k = \sqrt{|z_k|}, \qquad m = 1, 2, \dots, n. \qquad (9)$$

Случай с нулевым корнем $z_s = 0$ рассматривается с помощью введения новой постоянной $D = B_s \mu_s$ и предельного перехода $\mu_s \to 0$. В результате в решении (8) вместо члена $B_s \operatorname{sh}\bigl[\mu_s(x-t)\bigr]$ возникает слагаемое $D(x-t)$, а в системе (9) появляются соответствующие слагаемые $D\lambda_m^{-2}$.

20. $\displaystyle \boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(\lambda t)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(\lambda t)} f(t)\,dt.$$

21. $\displaystyle \boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\sin(\lambda t)}{\sin(\lambda x)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\sin(\lambda t)}{\sin(\lambda x)} f(t)\,dt.$$

22. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \sin^k(\lambda x)\sin^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\sin^k(\lambda x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

23. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x t\sin[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.36 при $g(t) = At$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A\lambda}{W}\int_a^x t\bigl[u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)\bigr]f(t)\,dt,$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + \lambda(Ax+\lambda)u = 0$, а W — определитель Вронского. Функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ в зависимости от знака произведения $A\lambda$ выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя.

При $A\lambda > 0$ имеем

$$u_1(x) = \xi^{1/2}J_{1/3}\bigl(\tfrac{2}{3}\sqrt{A\lambda}\,\xi^{3/2}\bigr), \quad u_2(x) = \xi^{1/2}Y_{1/3}\bigl(\tfrac{2}{3}\sqrt{A\lambda}\,\xi^{3/2}\bigr),$$
$$W = 3/\pi, \quad \xi = x + (\lambda/A).$$

При $A\lambda < 0$ имеем

$$u_1(x) = \xi^{1/2}I_{1/3}\bigl(\tfrac{2}{3}\sqrt{-A\lambda}\,\xi^{3/2}\bigr), \quad u_2(x) = \xi^{1/2}K_{1/3}\bigl(\tfrac{2}{3}\sqrt{-A\lambda}\,\xi^{3/2}\bigr),$$
$$W = -\tfrac{3}{2}, \quad \xi = x + (\lambda/A).$$

24. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x x\sin[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.37 при $g(x) = Ax$, $h(t) = 1$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A\lambda}{W}\int_a^x x\bigl[u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)\bigr]f(t)\,dt,$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + \lambda(Ax+\lambda)u = 0$, а W — определитель Вронского.

Функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ и W указаны в 2.5.23.

25. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x t^k\sin^m(\lambda x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A\sin^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

26. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x x^k\sin^m(\lambda t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \sin^m(\lambda t)$.

27. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \bigl[A\sin(kx) + B - AB(x-t)\sin(kx)\bigr]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A\sin(kx)$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = [A\sin(kx)+B]\frac{G(x)}{G(t)} + \frac{B^2}{G(t)}\int_t^x e^{B(x-s)}G(s)\,ds, \quad G(x) = \exp\left[-\frac{A}{k}\cos(kx)\right].$$

28. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl[A\sin(kt) + B + AB(x-t)\sin(kt)\bigr]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A\sin(kt)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = -[A\sin(kt)+B]\frac{G(t)}{G(x)} + \frac{B^2}{G(x)}\int_t^x e^{B(t-s)}G(s)\,ds, \quad G(x) = \exp\Bigl[-\frac{A}{k}\cos(kx)\Bigr].$$

29. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty \sin\bigl(\lambda\sqrt{t-x}\,\bigr)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = A\sin\bigl(\lambda\sqrt{-x}\,\bigr)$.

2.5-3. Ядра уравнений содержат тангенс

30. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{tg}(\lambda x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{tg}(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{tg}(\lambda x)\left|\frac{\cos(\lambda t)}{\cos(\lambda x)}\right|^{A/\lambda} f(t)\,dt.$$

31. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{tg}(\lambda t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \operatorname{tg}(\lambda t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{th}(\lambda t)\left|\frac{\cos(\lambda t)}{\cos(\lambda x)}\right|^{A/\lambda} f(t)\,dt.$$

32. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \bigl[\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.5 при $g(x) = A\operatorname{tg}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W}\int_a^x \bigl[Y_1'(x)Y_2'(t) - Y_2'(x)Y_1'(t)\bigr]f(t)\,dt,$$

где $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $\cos^2(\lambda x)Y''_{xx} + A\lambda Y = 0$, W — определитель Вронского, штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках.

Из книги В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) следует, что $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ можно выразить через гипергеометрические функции.

33. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{tg}(\lambda x)}{\operatorname{tg}(\lambda t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\operatorname{tg}(\lambda x)}{\operatorname{tg}(\lambda t)}f(t)\,dt.$$

34. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{tg}(\lambda t)}{\operatorname{tg}(\lambda x)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{tg}(\lambda t)}{\operatorname{tg}(\lambda x)} f(t)\,dt.$$

35. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{tg}^k(\lambda x)\operatorname{tg}^m(\mu t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{tg}^k(\lambda x)$, $h(t) = \operatorname{tg}^m(\mu t)$.

36. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x t^k \operatorname{tg}^m(\lambda x) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A\operatorname{tg}^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

37. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x x^k \operatorname{tg}^m(\lambda t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \operatorname{tg}^m(\lambda t)$.

38. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \bigl[A\operatorname{tg}(kx) + B - AB(x-t)\operatorname{tg}(kx)\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A\operatorname{tg}(kx)$.

39. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl[A\operatorname{tg}(kt) + B + AB(x-t)\operatorname{tg}(kt)\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A\operatorname{tg}(kt)$.

2.5-4. Ядра уравнений содержат котангенс

40. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{ctg}(\lambda x) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{ctg}(\lambda x)$, $h(t) = 1$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{ctg}(\lambda x)\left|\frac{\sin(\lambda x)}{\sin(\lambda t)}\right|^{A/\lambda} f(t)\,dt.$$

41. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{ctg}(\lambda t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \operatorname{ctg}(\lambda t)$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x \operatorname{cth}(\lambda t)\left|\frac{\sin(\lambda x)}{\sin(\lambda t)}\right|^{A/\lambda} f(t)\,dt.$$

42. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{ctg}(\lambda x)}{\operatorname{ctg}(\lambda t)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{ctg}(\lambda x)}{\operatorname{ctg}(\lambda t)} f(t)\,dt.$$

43. $\displaystyle y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{ctg}(\lambda t)}{\operatorname{ctg}(\lambda x)}\,y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\operatorname{ctg}(\lambda t)}{\operatorname{ctg}(\lambda x)}\,f(t)\,dt.$$

44. $\displaystyle y(x) + A\int_a^x t^k \operatorname{ctg}^m(\lambda x)\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A\operatorname{ctg}^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

45. $\displaystyle y(x) + A\int_a^x x^k \operatorname{ctg}^m(\lambda t)\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \operatorname{ctg}^m(\lambda t)$.

46. $\displaystyle y(x) - \int_a^x \bigl[A\operatorname{ctg}(kx) + B - AB(x-t)\operatorname{ctg}(kx)\bigr]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A\operatorname{ctg}(kx)$.

47. $\displaystyle y(x) + \int_a^x \bigl[A\operatorname{ctg}(kt) + B + AB(x-t)\operatorname{ctg}(kt)\bigr]\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A\operatorname{ctg}(kt)$.

2.5-5. Ядра уравнений содержат комбинации тригонометрических функций

48. $\displaystyle y(x) - A\int_a^x \cos^k(\lambda x)\sin^m(\mu t)\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\cos^k(\lambda x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

49. $\displaystyle y(x) - \int_a^x \bigl\{A + B\cos(\lambda x) - B(x-t)[\lambda\sin(\lambda x) + A\cos(\lambda x)]\bigr\}\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.38 при $b = B$, $g(x) = A$.

50. $\displaystyle y(x) - \int_a^x \bigl\{A + B\sin(\lambda x) + B(x-t)[\lambda\cos(\lambda x) - A\sin(\lambda x)]\bigr\}\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.39 при $b = B$, $g(x) = A$.

51. $\displaystyle y(x) - A\int_a^x \operatorname{tg}^k(\lambda x)\operatorname{ctg}^m(\mu t)\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{tg}^k(\lambda x)$, $h(t) = \operatorname{ctg}^m(\mu t)$.

2.6. Уравнения, ядра которых содержат обратные тригонометрические функции

2.6-1. Ядра уравнений содержат арккосинус

1. $\displaystyle y(x) - A\int_a^x \arccos(\lambda x)\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\arccos(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

2. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \arccos(\lambda t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \arccos(\lambda t)$.

3. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\arccos(\lambda x)}{\arccos(\lambda t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:
$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\arccos(\lambda x)}{\arccos(\lambda t)}f(t)\,dt.$$

4. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\arccos(\lambda t)}{\arccos(\lambda x)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:
$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\arccos(\lambda t)}{\arccos(\lambda x)}f(t)\,dt.$$

5. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \big[A\arccos(kx) + B - AB(x-t)\arccos(kx)\big]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A\arccos(kx)$.

6. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \big[A\arccos(kt) + B + AB(x-t)\arccos(kt)\big]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A\arccos(kt)$.

2.6-2. Ядра уравнений содержат арксинус

7. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \arcsin(\lambda x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\arcsin(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

8. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \arcsin(\lambda t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \arcsin(\lambda t)$.

9. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\arcsin(\lambda x)}{\arcsin(\lambda t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:
$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\arcsin(\lambda x)}{\arcsin(\lambda t)}f(t)\,dt.$$

10. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\arcsin(\lambda t)}{\arcsin(\lambda x)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:
$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\arcsin(\lambda t)}{\arcsin(\lambda x)}f(t)\,dt.$$

11. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \big[A\arcsin(kx) + B - AB(x-t)\arcsin(kx)\big]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A\arcsin(kx)$.

12. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl[A\arcsin(kt) + B + AB(x-t)\arcsin(kt)\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A\arcsin(kt)$.

2.6-3. Ядра уравнений содержат арктангенс

13. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{arctg}(\lambda x) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{arctg}(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

14. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{arctg}(\lambda t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \operatorname{arctg}(\lambda t)$.

15. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{arctg}(\lambda x)}{\operatorname{arctg}(\lambda t)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{arctg}(\lambda x)}{\operatorname{arctg}(\lambda t)} f(t)\,dt.$$

16. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{arctg}(\lambda t)}{\operatorname{arctg}(\lambda x)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{arctg}(\lambda t)}{\operatorname{arctg}(\lambda x)} f(t)\,dt.$$

17. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty \operatorname{arctg}[\lambda(t-x)] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = A\operatorname{arctg}(-\lambda x)$.

18. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \bigl[A\operatorname{arctg}(kx) + B - AB(x-t)\operatorname{arctg}(kx)\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A\operatorname{arctg}(kx)$.

19. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl[A\operatorname{arctg}(kt) + B + AB(x-t)\operatorname{arctg}(kt)\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A\operatorname{arctg}(kt)$.

2.6-4. Ядра уравнений содержат арккотангенс

20. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{arcctg}(\lambda x) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{arcctg}(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

21. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \operatorname{arcctg}(\lambda t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \operatorname{arcctg}(\lambda t)$.

22. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{arcctg}(\lambda x)}{\operatorname{arcctg}(\lambda t)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\operatorname{arcctg}(\lambda x)}{\operatorname{arcctg}(\lambda t)} f(t)\,dt.$$

23. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{\operatorname{arcctg}(\lambda t)}{\operatorname{arcctg}(\lambda x)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{\operatorname{arcctg}(\lambda t)}{\operatorname{arcctg}(\lambda x)} f(t)\,dt.$$

24. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty \operatorname{arcctg}[\lambda(t-x)] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = A\operatorname{arcctg}(-\lambda x)$.

25. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \big[A\operatorname{arcctg}(kx) + B - AB(x-t)\operatorname{arcctg}(kx)\big] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A\operatorname{arcctg}(kx)$.

26. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \big[A\operatorname{arcctg}(kt) + B + AB(x-t)\operatorname{arcctg}(kt)\big] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A\operatorname{arcctg}(kt)$.

2.7. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций

2.7-1. Ядра содержат экспоненциальные и гиперболические функции

1. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x e^{\mu(x-t)}\operatorname{ch}[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t)\,dt,$$

$$R(x) = \exp\big[(\mu - \tfrac{1}{2}A)x\big]\left[\frac{A^2}{2k}\operatorname{sh}(kx) - A\operatorname{ch}(kx)\right], \quad k = \sqrt{\lambda^2 + \tfrac{1}{4}A^2}.$$

2. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x e^{\mu(x-t)}\operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Решение при $\lambda(A-\lambda) > 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k}\int_a^x e^{\mu(x-t)}\sin[k(x-t)] f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad k = \sqrt{\lambda(A-\lambda)}.$$

2°. Решение при $\lambda(A-\lambda) < 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k}\int_a^x e^{\mu(x-t)}\operatorname{sh}[k(x-t)] f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad k = \sqrt{\lambda(\lambda-A)}.$$

3°. Решение при $A = \lambda$:

$$y(x) = f(x) - \lambda^2\int_a^x (x-t)e^{\mu(x-t)} f(t)\,dt.$$

3. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)} \{ A_1 \operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)] + A_2 \operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)] \} y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.3.18:

$$w(x) + \int_a^x \{ A_1 \operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)] + A_2 \operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)] \} w(t)\,dt = e^{-\mu x} f(x).$$

4. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x t e^{\mu(x-t)} \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.3.23:

$$w(x) + A\int_a^x t \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] w(t)\,dt = e^{-\mu x} f(x).$$

2.7-2. Ядра содержат экспоненциальные и логарифмические функции

5. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x e^{\mu t} \ln(\lambda x) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\ln(\lambda x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

6. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x e^{\mu x} \ln(\lambda t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = Ae^{\mu x}$, $h(t) = \ln(\lambda t)$.

7. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x e^{\mu(x-t)} \ln(\lambda x) y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{(\mu-A)(x-t)} \ln(\lambda x) \frac{(\lambda x)^{Ax}}{(\lambda t)^{At}} f(t)\,dt.$$

8. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x e^{\mu(x-t)} \ln(\lambda t) y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{(\mu-A)(x-t)} \ln(\lambda t) \frac{(\lambda x)^{Ax}}{(\lambda t)^{At}} f(t)\,dt.$$

9. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x e^{\mu(x-t)} (\ln x - \ln t) y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W}\int_a^x e^{\mu(x-t)} \big[u_1'(x) u_2'(t) - u_2'(x) u_1'(t) \big] f(t)\,dt,$$

где штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках, $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + Ax^{-1}u = 0$, которая выражается через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака параметра A:

$$W = \tfrac{1}{\pi}, \quad u_1(x) = \sqrt{x}\, J_1\big(2\sqrt{Ax}\,\big), \quad u_2(x) = \sqrt{x}\, Y_1\big(2\sqrt{Ax}\,\big) \quad \text{при} \quad A > 0,$$
$$W = -\tfrac{1}{2}, \quad u_1(x) = \sqrt{x}\, I_1\big(2\sqrt{-Ax}\,\big), \quad u_2(x) = \sqrt{x}\, K_1\big(2\sqrt{-Ax}\,\big) \quad \text{при} \quad A < 0.$$

10. $y(x) + a\int_x^\infty e^{\lambda(x-t)} \ln(t-x) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = ae^{\lambda x}\ln(-x)$.

2.7-3. Ядра содержат экспоненциальные и тригонометрические функции

11. $y(x) - A\int_a^x e^{\mu t}\cos(\lambda x) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\cos(\lambda x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

12. $y(x) - A\int_a^x e^{\mu x}\cos(\lambda t) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = Ae^{\mu x}$, $h(t) = \cos(\lambda t)$.

13. $y(x) + A\int_a^x e^{\mu(x-t)}\cos[\lambda(x-t)] y(t)\,dt = f(x).$

1°. Решение при $|A| > 2|\lambda|$:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t)\,dt,$$

$$R(x) = \exp\bigl[(\mu - \tfrac{1}{2}A)x\bigr]\left[\frac{A^2}{2k}\operatorname{sh}(kx) - A\operatorname{ch}(kx)\right], \quad k = \sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 - \lambda^2}.$$

2°. Решение при $|A| < 2|\lambda|$:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t)\,dt,$$

$$R(x) = \exp\bigl[(\mu - \tfrac{1}{2}A)x\bigr]\left[\frac{A^2}{2k}\sin(kx) - A\cos(kx)\right], \quad k = \sqrt{\lambda^2 - \tfrac{1}{4}A^2}.$$

3°. Решение при $\lambda = \pm\frac{1}{2}A$:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t)\,dt, \qquad R(x) = \bigl(\tfrac{1}{2}A^2 x - A\bigr)\exp\bigl[(\mu - \tfrac{1}{2}A)x\bigr].$$

14. $y(x) - \int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl[A\cos(kx) + B - AB(x-t)\cos(kx)\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)} M(x,t) f(t)\,dt,$$

$$M(x,t) = [A\cos(kx) + B]\frac{G(x)}{G(t)} + \frac{B^2}{G(t)}\int_t^x e^{B(x-s)} G(s)\,ds, \quad G(x) = \exp\left[\frac{A}{k}\sin(kx)\right].$$

15. $y(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl[A\cos(kt) + B + AB(x-t)\cos(kt)\bigr] y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)} M(x,t) f(t)\,dt,$$

$$M(x,t) = -[A\cos(kt) + B]\frac{G(t)}{G(x)} + \frac{B^2}{G(x)}\int_t^x e^{B(t-s)} G(s)\,ds, \quad G(x) = \exp\left[\frac{A}{k}\sin(kx)\right].$$

16. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x e^{\mu t}\sin(\lambda x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\sin(\lambda x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

17. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x e^{\mu x}\sin(\lambda t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = Ae^{\mu x}$, $h(t) = \sin(\lambda t)$.

18. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x e^{\mu(x-t)}\sin[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Решение при $\lambda(A+\lambda) > 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k}\int_a^x e^{\mu(x-t)}\sin[k(x-t)]f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad k = \sqrt{\lambda(A+\lambda)}.$$

2°. Решение при $\lambda(A+\lambda) < 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k}\int_a^x e^{\mu(x-t)}\,\mathrm{sh}[k(x-t)]f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad k = \sqrt{-\lambda(\lambda+A)}.$$

3°. Решение при $A = -\lambda$:

$$y(x) = f(x) + \lambda^2\int_a^x (x-t)e^{\mu(x-t)}f(t)\,dt.$$

19. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x e^{\mu(x-t)}\sin^3[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 2.5.17:

$$w(x) + A\int_a^x \sin^3[\lambda(x-t)]w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

20. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)}\{A_1\sin[\lambda_1(x-t)] + A_2\sin[\lambda_2(x-t)]\}y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 2.5.18:

$$w(x) + \int_a^x \{A_1\sin[\lambda_1(x-t)] + A_2\sin[\lambda_2(x-t)]\}w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

21. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)}\Big\{\sum_{k=1}^n A_k\sin[\lambda_k(x-t)]\Big\}y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 2.5.19:

$$w(x) + \int_a^x \left\{\sum_{k=1}^n A_k\sin[\lambda_k(x-t)]\right\}w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

22. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x te^{\mu(x-t)}\sin[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A\lambda}{W}\int_a^x te^{\mu(x-t)}\big[u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)\big]f(t)\,dt,$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + \lambda(Ax+\lambda)u = 0$, а W —

определитель Вронского. Функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ в зависимости от знака произведения $A\lambda$ выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя.

При $A\lambda > 0$ имеем

$$u_1(x) = \xi^{1/2} J_{1/3}\bigl(\tfrac{2}{3}\sqrt{A\lambda}\,\xi^{3/2}\bigr), \quad u_2(x) = \xi^{1/2} Y_{1/3}\bigl(\tfrac{2}{3}\sqrt{A\lambda}\,\xi^{3/2}\bigr),$$
$$W = 3/\pi, \quad \xi = x + (\lambda/A).$$

При $A\lambda < 0$ имеем

$$u_1(x) = \xi^{1/2} I_{1/3}\bigl(\tfrac{2}{3}\sqrt{-A\lambda}\,\xi^{3/2}\bigr), \quad u_2(x) = \xi^{1/2} K_{1/3}\bigl(\tfrac{2}{3}\sqrt{-A\lambda}\,\xi^{3/2}\bigr),$$
$$W = -\tfrac{3}{2}, \quad \xi = x + (\lambda/A).$$

23. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x xe^{\mu(x-t)}\sin[\lambda(x-t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A\lambda}{W}\int_a^x xe^{\mu(x-t)}\bigl[u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)\bigr] f(t)\,dt,$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + \lambda(Ax+\lambda)u = 0$, а W — определитель Вронского.

Функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ и W указаны в 2.7.22.

24. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty e^{\mu(t-x)}\sin\bigl(\lambda\sqrt{t-x}\,\bigr)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = Ae^{-\mu x}\sin\bigl(\lambda\sqrt{-x}\bigr)$.

25. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl[A\sin(kx) + B - AB(x-t)\sin(kx)\bigr]y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)} M(x,t) f(t)\,dt,$$

$$M(x,t) = [A\sin(kx)+B]\frac{G(x)}{G(t)} + \frac{B^2}{G(t)}\int_t^x e^{B(x-s)}G(s)\,ds, \quad G(x) = \exp\Bigl[-\frac{A}{k}\cos(kx)\Bigr].$$

26. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)}\bigl[A\sin(kt) + B + AB(x-t)\sin(kt)\bigr]y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)} M(x,t) f(t)\,dt,$$

$$M(x,t) = -[A\sin(kt)+B]\frac{G(t)}{G(x)} + \frac{B^2}{G(x)}\int_t^x e^{B(t-s)}G(s)\,ds, \quad G(x) = \exp\Bigl[-\frac{A}{k}\cos(kx)\Bigr].$$

27. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x e^{\mu t}\,\mathrm{tg}(\lambda x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\,\mathrm{tg}(\lambda x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

28. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x e^{\mu x}\,\mathrm{tg}(\lambda t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = Ae^{\mu x}$, $h(t) = \mathrm{tg}(\lambda t)$.

29. $y(x) + A\int_a^x e^{\mu(x-t)}\big[\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)\big]y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 2.5.32:

$$w(x) + A\int_a^x \big[\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)\big]w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

30. $y(x) - \int_a^x e^{\mu(x-t)}\big[A\operatorname{tg}(kx) + B - AB(x-t)\operatorname{tg}(kx)\big]y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A\operatorname{tg}(kx)$:

$$w(x) - \int_a^x \big[A\operatorname{tg}(kx) + B - AB(x-t)\operatorname{tg}(kx)\big]w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

31. $y(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)}\big[A\operatorname{tg}(kt) + B + AB(x-t)\operatorname{tg}(kt)\big]y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = e^{-\mu x}y(x)$ приводит к уравнению вида 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A\operatorname{tg}(kt)$:

$$w(x) + \int_a^x \big[A\operatorname{tg}(kt) + B + AB(x-t)\operatorname{tg}(kt)\big]w(t)\,dt = e^{-\mu x}f(x).$$

32. $y(x) - A\int_a^x e^{\mu t}\operatorname{ctg}(\lambda x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{ctg}(\lambda x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

33. $y(x) - A\int_a^x e^{\mu x}\operatorname{ctg}(\lambda t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = Ae^{\mu x}$, $h(t) = \operatorname{ctg}(\lambda t)$.

2.7-4. Ядра содержат гиперболические и логарифмические функции

34. $y(x) - A\int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda x)\ln^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{ch}^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

35. $y(x) - A\int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda t)\ln^m(\mu x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{ch}^k(\lambda t)$.

36. $y(x) - A\int_a^x \operatorname{sh}^k(\lambda x)\ln^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{sh}^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

37. $y(x) - A\int_a^x \operatorname{sh}^k(\lambda t)\ln^m(\mu x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^k(\lambda t)$.

38. $y(x) - A\int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda x)\ln^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{th}^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

39. $\displaystyle y(x)-A\int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda t)\ln^m(\mu x)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x)=A\ln^m(\mu x)$, $h(t)=\operatorname{th}^k(\lambda t)$.

40. $\displaystyle y(x)-A\int_a^x \operatorname{cth}^k(\lambda x)\ln^m(\mu t)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x)=A\operatorname{cth}^k(\lambda x)$, $h(t)=\ln^m(\mu t)$.

41. $\displaystyle y(x)-A\int_a^x \operatorname{cth}^k(\lambda t)\ln^m(\mu x)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x)=A\ln^m(\mu x)$, $h(t)=\operatorname{cth}^k(\lambda t)$.

2.7-5. Ядра содержат гиперболические и тригонометрические функции

42. $\displaystyle y(x)-A\int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda x)\cos^m(\mu t)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x)=A\operatorname{ch}^k(\lambda x)$, $h(t)=\cos^m(\mu t)$.

43. $\displaystyle y(x)-A\int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda t)\cos^m(\mu x)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x)=A\cos^m(\mu x)$, $h(t)=\operatorname{ch}^k(\lambda t)$.

44. $\displaystyle y(x)-A\int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda x)\sin^m(\mu t)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x)=A\operatorname{ch}^k(\lambda x)$, $h(t)=\sin^m(\mu t)$.

45. $\displaystyle y(x)-A\int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda t)\sin^m(\mu x)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x)=A\sin^m(\mu x)$, $h(t)=\operatorname{ch}^k(\lambda t)$.

46. $\displaystyle y(x)-A\int_a^x \operatorname{sh}^k(\lambda x)\cos^m(\mu t)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x)=A\operatorname{sh}^k(\lambda x)$, $h(t)=\cos^m(\mu t)$.

47. $\displaystyle y(x)-A\int_a^x \operatorname{sh}^k(\lambda t)\cos^m(\mu x)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x)=A\cos^m(\mu x)$, $h(t)=\operatorname{sh}^k(\lambda t)$.

48. $\displaystyle y(x)-A\int_a^x \operatorname{sh}^k(\lambda x)\sin^m(\mu t)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x)=A\operatorname{sh}^k(\lambda x)$, $h(t)=\sin^m(\mu t)$.

49. $\displaystyle y(x)-A\int_a^x \operatorname{sh}^k(\lambda t)\sin^m(\mu x)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x)=A\sin^m(\mu x)$, $h(t)=\operatorname{sh}^k(\lambda t)$.

50. $\displaystyle y(x)-A\int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda x)\cos^m(\mu t)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x)=A\operatorname{th}^k(\lambda x)$, $h(t)=\cos^m(\mu t)$.

51. $y(x) - A\int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda t)\cos^m(\mu x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\cos^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{th}^k(\lambda t)$.

52. $y(x) - A\int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda x)\sin^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{th}^k(\lambda x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

53. $y(x) - A\int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda t)\sin^m(\mu x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\sin^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{th}^k(\lambda t)$.

2.7-6. Ядра содержат логарифмические и тригонометрические функции

54. $y(x) - A\int_a^x \cos^k(\lambda x)\ln^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\cos^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

55. $y(x) - A\int_a^x \cos^k(\lambda t)\ln^m(\mu x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\ln^m(\mu x)$, $h(t) = \cos^k(\lambda t)$.

56. $y(x) - A\int_a^x \sin^k(\lambda x)\ln^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\sin^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

57. $y(x) - A\int_a^x \sin^k(\lambda t)\ln^m(\mu x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\ln^m(\mu x)$, $h(t) = \sin^k(\lambda t)$.

58. $y(x) - A\int_a^x \operatorname{tg}^k(\lambda x)\ln^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{tg}^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

59. $y(x) - A\int_a^x \operatorname{tg}^k(\lambda t)\ln^m(\mu x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{tg}^k(\lambda t)$.

60. $y(x) - A\int_a^x \operatorname{ctg}^k(\lambda x)\ln^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\operatorname{ctg}^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

61. $y(x) - A\int_a^x \operatorname{ctg}^k(\lambda t)\ln^m(\mu x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A\ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{ctg}^k(\lambda t)$.

2.8. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции

2.8-1. Ядра уравнений содержат функции Бесселя

1. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_0^x J_0(x-t) y(t)\, dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t)\, dt,$$

где

$$R(x) = \lambda \cos\bigl(\sqrt{1-\lambda^2}\, x\bigr) + \frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}} \sin\bigl(\sqrt{1-\lambda^2}\, x\bigr) + \\ + \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \int_0^x \sin\bigl[\sqrt{1-\lambda^2}\,(x-t)\bigr] \frac{J_1(t)}{t}\, dt.$$

⊙ *Литература*: В. И. Смирнов (1974, стр. 153, 154).

2. $\boldsymbol{y(x) - A \int_a^x J_\nu(\lambda x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = AJ_\nu(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

3. $\boldsymbol{y(x) - A \int_a^x J_\nu(\lambda t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = J_\nu(\lambda t)$.

4. $\boldsymbol{y(x) - A \int_a^x \frac{J_\nu(\lambda x)}{J_\nu(\lambda t)} y(t)\, dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{J_\nu(\lambda x)}{J_\nu(\lambda t)} f(t)\, dt.$$

5. $\boldsymbol{y(x) - A \int_a^x \frac{J_\nu(\lambda t)}{J_\nu(\lambda x)} y(t)\, dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{J_\nu(\lambda t)}{J_\nu(\lambda x)} f(t)\, dt.$$

6. $\boldsymbol{y(x) + A \int_x^\infty J_\nu[\lambda(t-x)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = AJ_\nu(-\lambda x)$.

7. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \bigl[AJ_\nu(kx) + B - AB(x-t) J_\nu(kx)\bigr] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = AJ_\nu(kx)$.

8. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl[AJ_\nu(kt) + B + AB(x-t) J_\nu(kt)\bigr] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = AJ_\nu(kt)$.

9. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_0^x e^{\mu(x-t)} J_0(x-t) y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t)\,dt,$$

где

$$R(x) = e^{\mu x}\biggl\{\lambda\cos\bigl(\sqrt{1-\lambda^2}\,x\bigr) + \frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sin\bigl(\sqrt{1-\lambda^2}\,x\bigr) + \\ + \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\int_0^x \sin\bigl[\sqrt{1-\lambda^2}\,(x-t)\bigr]\frac{J_1(t)}{t}\,dt\biggr\}.$$

10. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x Y_\nu(\lambda x) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = AY_\nu(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

11. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x Y_\nu(\lambda t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = Y_\nu(\lambda t)$.

12. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{Y_\nu(\lambda x)}{Y_\nu(\lambda t)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{Y_\nu(\lambda x)}{Y_\nu(\lambda t)} f(t)\,dt.$$

13. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{Y_\nu(\lambda t)}{Y_\nu(\lambda x)} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{Y_\nu(\lambda t)}{Y_\nu(\lambda x)} f(t)\,dt.$$

14. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty Y_\nu[\lambda(t-x)] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = AY_\nu(-\lambda x)$.

15. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \bigl[AY_\nu(kx) + B - AB(x-t)Y_\nu(kx)\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = AY_\nu(kx)$.

16. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl[AY_\nu(kt) + B + AB(x-t)Y_\nu(kt)\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = AY_\nu(kt)$.

2.8-2. Ядра уравнений содержат модифицированные функции Бесселя

17. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x I_\nu(\lambda x) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = AI_\nu(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

18. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x I_\nu(\lambda t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = I_\nu(\lambda t)$.

19. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{I_\nu(\lambda x)}{I_\nu(\lambda t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{I_\nu(\lambda x)}{I_\nu(\lambda t)}f(t)\,dt.$$

20. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{I_\nu(\lambda t)}{I_\nu(\lambda x)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{I_\nu(\lambda t)}{I_\nu(\lambda x)}f(t)\,dt.$$

21. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty I_\nu[\lambda(t-x)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = AI_\nu(-\lambda x)$.

22. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \bigl[AI_\nu(kx) + B - AB(x-t)I_\nu(kx)\bigr]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = AI_\nu(kx)$.

23. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl[AI_\nu(kt) + B + AB(x-t)I_\nu(kt)\bigr]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = AI_\nu(kt)$.

24. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x K_\nu(\lambda x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = AK_\nu(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

25. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x K_\nu(\lambda t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = K_\nu(\lambda t)$.

26. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{K_\nu(\lambda x)}{K_\nu(\lambda t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{K_\nu(\lambda x)}{K_\nu(\lambda t)}f(t)\,dt.$$

27. $\boldsymbol{y(x) - A\int_a^x \frac{K_\nu(\lambda t)}{K_\nu(\lambda x)}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A\int_a^x e^{A(x-t)}\frac{K_\nu(\lambda t)}{K_\nu(\lambda x)}f(t)\,dt.$$

28. $\boldsymbol{y(x) + A\int_x^\infty K_\nu[\lambda(t-x)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = AK_\nu(-\lambda x)$.

29. $y(x) - \int_a^x \big[AK_\nu(kx) + B - AB(x-t)K_\nu(kx)\big] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = AK_\nu(kx)$.

30. $y(x) + \int_a^x \big[AK_\nu(kt) + B + AB(x-t)K_\nu(kt)\big] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = AK_\nu(kt)$.

2.9. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции

2.9-1. Уравнения с ядром вида $K(x,t) = g_1(x)h_1(t) + \cdots + g_n(x)h_n(t)$

1. $y(x) - \lambda \int_a^x \dfrac{g(x)}{g(t)} y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \frac{g(x)}{g(t)} f(t)\,dt.$$

2. $y(x) - \int_a^x g(x)h(t)y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt, \qquad \text{где} \quad R(x,t) = g(x)h(t)\exp\left[\int_t^x g(s)h(s)\,ds\right].$$

3. $y(x) + \int_a^x (x-t)g(x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.11.

1°. Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W}\int_a^x \big[Y_1(x)Y_2(t) - Y_2(x)Y_1(t)\big] g(x)f(t)\,dt, \tag{1}$$

где $Y_1 = Y_1(x)$ и $Y_2 = Y_2(x)$ — два линейно независимых ($Y_1/Y_2 \not\equiv \text{const}$) решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $Y''_{xx} + g(x)Y = 0$. В данном случае детерминант Вронского является постоянной величиной: $W = Y_1(Y_2)'_x - Y_2(Y_1)'_x \equiv \text{const}$.

2°. Если известно только одно нетривиальное решение $Y_1 = Y_1(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения $Y''_{xx} + g(x)Y = 0$, то решение интегрального уравнения можно найти по формуле (1), в которой следует положить

$$W = 1, \qquad Y_2(x) = Y_1(x)\int_b^x \frac{d\xi}{Y_1^2(\xi)},$$

где b — любое.

4. $y(x) + \int_a^x (x-t)g(t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.12.

1°. Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W}\int_a^x \bigl[Y_1(x)Y_2(t) - Y_2(x)Y_1(t)\bigr] g(t) f(t)\,dt, \tag{1}$$

где $Y_1 = Y_1(x)$ и $Y_2 = Y_2(x)$ — два линейно независимых ($Y_1/Y_2 \not\equiv \text{const}$) решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $Y''_{xx} + g(x)Y = 0$. В данном случае детерминант Вронского является постоянной величиной: $W = Y_1(Y_2)'_x - Y_2(Y_1)'_x \equiv \text{const}$.

2°. Если известно только одно нетривиальное решение $Y_1 = Y_1(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения $Y''_{xx} + g(x)Y = 0$, то решение интегрального уравнения можно найти по формуле (1), в которой следует положить

$$W = 1, \qquad Y_2(x) = Y_1(x)\int_b^x \frac{d\xi}{Y_1^2(\xi)},$$

где b — любое.

5. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl[g(x) - g(t)\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Продифференцируем уравнение по x:

$$y'_x(x) + g'_x(x)\int_a^x y(t)\,dt = f'_x(x). \tag{1}$$

Введем новую переменную $Y(x) = \int_a^x y(t)\,dt$. В результате получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Y''_{xx} + g'_x(x)Y = f'_x(x), \tag{2}$$

которое следует дополнить начальными условиями

$$Y(a) = 0, \quad Y'_x(a) = f(a). \tag{3}$$

Эти условия являются следствием исходного уравнения и способа определения новой переменной $Y(x)$.

Точные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (2) для различных функций $f(x)$ см. в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995, 1997).

2°. Пусть $Y_1 = Y_1(x)$ и $Y_2 = Y_2(x)$ — два линейно независимых ($Y_1/Y_2 \not\equiv \text{const}$) решения однородного дифференциального уравнения $Y''_{xx} + g'_x(x)Y = 0$, которое получается из (2) при $f(x) \equiv 0$. В данном случае детерминант Вронского является постоянной величиной

$$W = Y_1(Y_2)'_x - Y_2(Y_1)'_x \equiv \text{const}\,.$$

Решение неоднородного уравнения (2) с начальными условиями (3) для произвольной функции $f = f(x)$ с учетом равенства $y(x) = Y'_x(x)$ приводит к решению рассматриваемого интегрального уравнения в виде

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W}\int_a^x \bigl[Y_1'(x)Y_2'(t) - Y_2'(x)Y_1'(t)\bigr] f(t)\,dt, \tag{4}$$

где штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках.

3°. Если известно только одно нетривиальное решение $Y_1 = Y_1(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения $Y''_{xx} + g'_x(x)Y = 0$, то решение неоднородного уравнения (2) с начальными условиями (3) можно найти по формуле (4), в которой следует положить

$$W = 1, \qquad Y_2(x) = Y_1(x)\int_b^x \frac{d\xi}{Y_1^2(\xi)},$$

где b — любое.

6. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl[g(x) + h(t)\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Продифференцируем уравнение по x:

$$y'_x(x) + \bigl[g(x) + h(x)\bigr] y(x) + g'_x(x) \int_a^x y(t)\,dt = f'_x(x).$$

Введем новую переменную $Y(x) = \int_a^x y(t)\,dt$. В результате получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$Y''_{xx} + \bigl[g(x) + h(x)\bigr] Y'_x + g'_x(x) Y = f'_x(x), \tag{1}$$

которое следует дополнить начальными условиями

$$Y(a) = 0, \quad Y'_x(a) = f(a). \tag{2}$$

Эти условия являются следствием исходного уравнения и способа определения новой переменной $Y(x)$.

Точные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (1) для различных функций $f(x)$ см. в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995, 1997).

2°. Пусть $Y_1 = Y_1(x)$ и $Y_2 = Y_2(x)$ — два линейно независимых решения однородного дифференциального уравнения $Y''_{xx} + \bigl[g(x) + h(x)\bigr] Y'_x + g'_x(x) Y = 0$, которое получается из (1) при $f(x) \equiv 0$.

Решение неоднородного уравнения (1) с начальными условиями (2) для произвольной функции $f = f(x)$ с учетом равенства $y(x) = Y'_x(x)$ приводит к решению интегрального уравнения

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t) f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left[\frac{Y_1(x)Y_2(t) - Y_2(x)Y_1(t)}{W(t)} \right], \quad W(x) = Y_1(x)Y'_2(x) - Y_2(x)Y'_1(x),$$

где $W(x)$ — детерминант Вронского, штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках.

7. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \bigl[g(x) + \lambda - \lambda(x-t)g(x)\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $h(x) = \lambda$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t) f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = [g(x) + \lambda] \frac{G(x)}{G(t)} + \frac{\lambda^2}{G(t)} \int_t^x e^{\lambda(x-s)} G(s)\,ds, \quad G(x) = \exp\left[\int_a^x g(s)\,ds\right].$$

8. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl[g(t) + \lambda + \lambda(x-t)g(t)\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t) f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = -[g(t) + \lambda] \frac{G(t)}{G(x)} + \frac{\lambda^2}{G(x)} \int_t^x e^{\lambda(t-s)} G(s)\,ds, \quad G(x) = \exp\left[\int_a^x g(s)\,ds\right].$$

9. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \bigl[g_1(x) + g_2(x)t\bigr] y(t)\,dt = f(x).}$

Это уравнение можно записать в виде уравнения 2.9.11 при $g_1(x) = g(x) + xh(x)$, $g_2(x) = -h(x)$.

10. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \big[g_1(t) + g_2(t)x\big]\, y(t)\,dt = f(x).}$

Это уравнение можно записать в виде уравнения 2.9.12 при $g_1(t) = g(t) + h(t)t$, $g_2(t) = -h(t)$.

11. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \big[g(x) + h(x)(x-t)\big]\, y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Решение интегрального уравнения можно представить в виде $y(x) = Y''_{xx}$, где $Y = Y(x)$ — решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$Y''_{xx} - g(x)Y'_x - h(x)Y = f(x), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$Y(a) = Y'_x(a) = 0. \tag{2}$$

2°. Пусть $Y_1 = Y_1(x)$ и $Y_2 = Y_2(x)$ — два нетривиальных линейно независимых частных решения однородного обыкновенного дифференциального уравнения $Y''_{xx} - g(x)Y'_x - h(x)Y = 0$, которое получается из (1) при $f \equiv 0$. Тогда решение неоднородного дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), дается формулой

$$Y(x) = \int_a^x \big[Y_2(x)Y_1(t) - Y_1(x)Y_2(t)\big]\frac{f(t)}{W(t)}\,dt, \qquad W(t) = Y_1(t)Y_2'(t) - Y_2(t)Y_1'(t), \tag{3}$$

где $W(t)$ — детерминант Вронского, штрихами обозначены производные.

Подставляя выражение (3) в формулу (1), получим решение исходного интегрального уравнения в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt, \qquad R(x,t) = \frac{1}{W(t)}\big[Y_2''(x)Y_1(t) - Y_1''(x)Y_2(t)\big]. \tag{4}$$

3°. Пусть $Y_1 = Y_1(x)$ — нетривиальное частное решение однородного дифференциального уравнения (1) при $f \equiv 0$, удовлетворяющее условию $Y_1(a) \neq 0$. Тогда другим нетривиальным решением однородного уравнения является функция

$$Y_2(x) = Y_1(x)\int_a^x \frac{W(t)}{[Y_1(t)]^2}\,dt, \qquad W(x) = \exp\left[\int_a^x g(s)\,ds\right]. \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) в формулу (4), получим решение исходного интегрального уравнения в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = g(x)\frac{W(x)}{Y_1(x)}\frac{Y_1(t)}{W(t)} + \big[g(x)Y_1'(x) + h(x)Y_1(x)\big]\frac{Y_1(t)}{W(t)}\int_t^x \frac{W(s)}{[Y_1(s)]^2}\,ds,$$

где $W(x) = \exp\left[\int_a^x g(s)\,ds\right]$.

12. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \big[g(t) + h(t)(t-x)\big]\, y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = g(t)\frac{Y(x)W(x)}{Y(t)W(t)} + Y(x)W(x)\big[g(t)Y_t'(t) + h(t)Y(t)\big]\int_x^t \frac{ds}{W(s)[Y(s)]^2},$$

$$W(t) = \exp\left[\int_b^t g(t)\,dt\right],$$

где $Y = Y(x)$ — любое нетривиальное решение однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$Y''_{xx} + g(x)Y'_x + h(x)Y = 0,$$

удовлетворяющее условию $Y(a) \neq 0$.

13. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x (x-t)g(x)h(t)y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $y(x) = g(x)u(x)$ приводит к уравнению вида 2.9.4:

$$u(x) + \int_a^x (x-t)g(t)h(t)u(t)\,dt = f(x)/g(x).$$

14. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \{g(x) + \lambda x^n + \lambda(x-t)x^{n-1}[n - xg(x)]\}y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $h(x) = \lambda x^n$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = [g(x) + \lambda x^n]\frac{G(x)}{G(t)} + \lambda(\lambda x^{2n} + nx^{n-1})\frac{H(x)}{G(t)}\int_t^x \frac{G(s)}{H(s)}\,ds,$$

где $G(x) = \exp\left[\int_a^x g(s)\,ds\right]$, $H(x) = \exp\left(\frac{\lambda}{n+1}x^{n+1}\right)$.

15. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \{g(x) + \lambda + (x-t)[g'_x(x) - \lambda g(x)]\}y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.16.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = [g(x) + \lambda]e^{\lambda(x-t)} + \bigl\{[g(x)]^2 + g'_x(x)\bigr\}G(x)\int_t^x \frac{e^{\lambda(s-t)}}{G(s)}\,ds,$$

где $G(x) = \exp\left[\int_a^x g(s)\,ds\right]$.

16. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \{g(x) + h(x) + (x-t)[h'_x(x) - g(x)h(x)]\}y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = [g(x) + h(x)]\frac{G(x)}{G(t)} + \{[h(x)]^2 + h'_x(x)\}\frac{H(x)}{G(t)}\int_t^x \frac{G(s)}{H(s)}\,ds,$$

где $G(x) = \exp\left[\int_a^x g(s)\,ds\right]$, $H(x) = \exp\left[\int_a^x h(s)\,ds\right]$.

17. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \left\{\frac{\varphi'_x(x)}{\varphi(t)} + \bigl[\varphi(t)g'_x(x) - \varphi'_x(x)g(t)\bigr]h(t)\right\}y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\int_a^x \left\{\frac{\varphi(x)}{\varphi(t)} + \bigl[\varphi(t)g(x) - \varphi(x)g(t)\bigr]h(t)\right\}y(t)\,dt = F(x), \quad F(x) = \int_a^x f(x)\,dx, \quad (1)$$

из которого получается путем дифференцирования по x. Уравнение (1) является частным случаем уравнения 1.9.15 при

$$g_1(x)=g(x),\quad h_1(t)=\varphi(t)h(t),\quad g_2(x)=\varphi(x),\quad h_2(t)=\frac{1}{\varphi(t)}-g(t)h(t).$$

2°. Решение:

$$y(x)=\frac{1}{\varphi(x)h(x)}\frac{d}{dx}\left\{\Xi(x)\int_a^x\left[\frac{F(t)}{\varphi(t)}\right]_t'\frac{\varphi^2(t)h(t)}{\Xi(t)}\,dt\right\},$$
$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx,\quad \Xi(x)=\exp\left\{-\int_a^x\left[\frac{g(t)}{\varphi(t)}\right]_t'\varphi^2(t)h(t)\,dt\right\}.$$

18. $\boldsymbol{y(x)-\int_a^x\left\{\frac{\varphi_t'(t)}{\varphi(x)}+\big[\varphi(x)g_t'(t)-\varphi_t'(t)g(x)\big]h(x)\right\}y(t)\,dt=f(x).}$

1°. *Случай* $f(a)=0$. Замена

$$y(x)=\int_a^x w(t)\,dt \tag{1}$$

с последующим интегрированием по частям приводит к уравнению

$$\int_a^x\left\{\frac{\varphi(t)}{\varphi(x)}+\big[\varphi(x)g(t)-\varphi(t)g(x)\big]h(x)\right\}w(t)\,dt=f(x), \tag{2}$$

которое является частным случаем уравнения 1.9.15 при

$$g_1(x)=\frac{1}{\varphi(x)}-g(x)h(x),\quad h_1(t)=\varphi(t),\quad g_2(x)=\varphi(x)h(x),\quad h_2(t)=g(t).$$

Решение уравнения (2) определяется по формуле

$$y(x)=\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d}{dx}\left\{\varphi^2(x)h(x)\Phi(x)\int_a^x\left[\frac{f(t)}{\varphi(t)h(t)}\right]_t'\frac{dt}{\Phi(t)}\right\},$$
$$\Phi(x)=\exp\left\{\int_a^x\left[\frac{g(t)}{\varphi(t)}\right]_t'\varphi^2(t)h(t)\,dt\right\}.$$

2°. *Случай* $f(a)\neq 0$. Замена $y(x)=\bar y(x)+f(a)$ приводит к интегральному уравнению для функции $\bar y(x)$ с правой частью $\bar f(x)$, удовлетворяющей условию $\bar f(a)=0$. Об этом уравнении см. в п. 1°.

19. $\boldsymbol{y(x)-\int_a^x\left[\sum_{k=1}^n g_k(x)(x-t)^{k-1}\right]y(t)\,dt=f(x).}$

Решение можно представить в виде

$$y(x)=f(x)+\int_a^x R(x,t)f(t)\,dt. \tag{1}$$

Здесь резольвента $R(x,t)$ определяется выражением

$$R(x,t)=w_x^{(n)},\qquad w_x^{(n)}=\frac{d^nw}{dx^n}, \tag{2}$$

где w — решение линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$w_x^{(n)}-g_1(x)w_x^{(n-1)}-g_2(x)w_x^{(n-2)}-2g_3(x)w_x^{(n-3)}-\cdots-(n-1)!\,g_n(x)w=0, \tag{3}$$

удовлетворяющее следующим начальным условиям при $x=t$:

$$w\big|_{x=t}=w_x'\big|_{x=t}=\cdots=w_x^{(n-2)}\big|_{x=t}=0,\quad w_x^{(n-1)}\big|_{x=t}=1. \tag{4}$$

Отметим, что дифференциальное уравнение (3) неявно зависит от переменной t через начальные условия (4).

⊙ *Литература*: Э. Гурса (1934), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

20. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \left[\sum_{k=1}^{n} g_k(t)(t-x)^{k-1}\right] y(t)\,dt = f(x).}$

Решение можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t) f(t)\,dt. \tag{1}$$

Здесь резольвента $R(x,t)$ определяется выражением

$$R(x,t) = -u_t^{(n)}, \qquad u_t^{(n)} = \frac{d^n u}{dt^n}, \tag{2}$$

где u — решение линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$u_t^{(n)} + g_1(t) u_t^{(n-1)} + g_2(t) u_t^{(n-2)} + 2g_3(t) u_t^{(n-3)} + \ldots + (n-1)!\, g_n(t) u = 0, \tag{3}$$

удовлетворяющее следующим начальным условиями при $t = x$:

$$u\big|_{t=x} = u'_t\big|_{t=x} = \cdots = u_t^{(n-2)}\big|_{t=x} = 0, \quad u_t^{(n-1)}\big|_{t=x} = 1. \tag{4}$$

Отметим, что дифференциальное уравнение (3) неявно зависит от переменной x через начальные условия (4).

⊙ *Литература*: Э. Гурса (1934), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

21. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \left(e^{\lambda x + \mu t} - e^{\mu x + \lambda t}\right) g(t) y(t)\,dt = f(x).}$

Продифференцируем интегральное уравнение дважды, а затем исключим из полученных равенств и исходного уравнения интегральные члены. В результате приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} - (\lambda+\mu) y'_x + \left[(\lambda-\mu) e^{(\lambda+\mu)x} g(x) + \lambda\mu\right] y = f''_{xx}(x) - (\lambda+\mu) f'_x(x) + \lambda\mu f(x),$$

которое надо дополнить начальными условиями $y(a) = f(a)$, $y'_x(a) = f'_x(a)$.

22. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \left[e^{\lambda x} g(t) + e^{\mu x} h(t)\right] y(t)\,dt = f(x).}$

Продифференцируем интегральное уравнение дважды, а затем исключим из полученных равенств и исходного уравнения интегральные члены. В результате приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\begin{aligned} y''_{xx} &+ \left[e^{\lambda x} g(x) + e^{\mu x} h(x) - \lambda - \mu\right] y'_x + \left[e^{\lambda x} g'_x(x) + e^{\mu x} h'_x(x) + \right.\\ &\left. + (\lambda-\mu) e^{\lambda x} g(x) + (\mu-\lambda) e^{\mu x} h(x) + \lambda\mu\right] y = f''_{xx}(x) - (\lambda+\mu) f'_x(x) + \lambda\mu f(x), \end{aligned}$$

которое надо дополнить начальными условиями

$$y(a) = f(a), \qquad y'_x(a) = f'_x(a) - \left[e^{\lambda a} g(a) + e^{\mu a} h(a)\right] f(a).$$

Частный случай. В теории вязкоупругости стареющих тел встречается уравнение

$$y(x) - \int_a^x \varphi(t) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\varphi(t)} + \psi(t)\left[1 - e^{-\lambda(x-t)}\right] \right\} y(t)\,dt = f(x).$$

Его решение имеет вид

$$y(x) = f(x) - \int_a^x \frac{1}{\varphi(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi(t) - \lambda\psi(t)\varphi^2(t) e^{\eta(t)} \int_t^x e^{-\eta(s)}\,ds\right] f(t)\,dt,$$

где

$$\eta(x) = \int_a^x \left\{ \lambda\left[1 + \psi(t)\varphi(t)\right] - \frac{\varphi'_t(t)}{\varphi(t)} \right\} dt.$$

⊙ *Литература*: Н. Х. Арутюнян (1952).

23. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \bigl[\lambda e^{\lambda(x-t)} + \bigl(\mu e^{\mu x+\lambda t} - \lambda e^{\lambda x+\mu t}\bigr)h(t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.17 при $\varphi(x) = e^{\lambda x}$, $g(x) = e^{\mu x}$.
Решение:

$$y(x) = \frac{1}{e^{\lambda x}h(x)}\frac{d}{dx}\left\{\Phi(x)\int_a^x \left[\frac{F(t)}{e^{\lambda t}}\right]_t' \frac{e^{2\lambda t}h(t)}{\Phi(t)}\,dt\right\},$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \Phi(x) = \exp\left[(\lambda-\mu)\int_a^x e^{(\lambda+\mu)t}h(t)\,dt\right].$$

24. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \bigl[\lambda e^{-\lambda(x-t)} + \bigl(\mu e^{\lambda x+\mu t} - \lambda e^{\mu x+\lambda t}\bigr)h(x)\bigr]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.18 при $\varphi(x) = e^{\lambda x}$, $g(x) = e^{\mu x}$.
Считаем, что $f(a) = 0$. Решение:

$$y(x) = \int_a^x w(t)\,dt, \quad w(x) = e^{-\lambda x}\frac{d}{dx}\left\{\frac{e^{2\lambda x}h(x)}{\Phi(x)}\int_a^x \left[\frac{f(t)}{e^{\lambda t}h(t)}\right]_t' \Phi(t)\,dt\right\},$$

$$\Phi(x) = \exp\left[(\lambda-\mu)\int_a^x e^{(\lambda+\mu)t}h(t)\,dt\right].$$

25. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \{g(x) + be^{\lambda x} + b(x-t)e^{\lambda x}[\lambda - g(x)]\}y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $h(x) = be^{\lambda x}$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = [g(x) + be^{\lambda x}]\frac{G(x)}{G(t)} + (b^2e^{2\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x})\frac{H(x)}{G(t)}\int_t^x \frac{G(s)}{H(s)}\,ds,$$

где $G(x) = \exp\left[\int_a^x g(s)\,ds\right]$, $H(x) = \exp\left(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda x}\right)$.

26. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \{\lambda e^{\lambda(x-t)} + [e^{\lambda t}g_x'(x) - \lambda e^{\lambda x}g(t)]h(t)\}y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.17 при $\varphi(x) = e^{\lambda x}$.

27. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \{\lambda e^{-\lambda(x-t)} + [e^{\lambda x}g_t'(t) - \lambda e^{\lambda t}g(x)]h(x)\}y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.18 при $\varphi(x) = e^{\lambda x}$.

28. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \mathrm{ch}[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f(x).}$

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y_x'(x) + g(x)y(x) + \lambda\int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f_x'(x), \tag{1}$$

$$y_{xx}''(x) + \bigl[g(x)y(x)\bigr]_x' + \lambda^2\int_a^x \mathrm{ch}[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f_{xx}''(x). \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y_{xx}'' + \bigl[g(x)y\bigr]_x' - \lambda^2 y = f_{xx}''(x) - \lambda^2 f(x). \tag{3}$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = f(a), \qquad y'_x(a) = f'_x(a) - f(a)g(a). \tag{4}$$

Уравнение (3) с условиями (4) определяет решение исходного интегрального уравнения.

29. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \mathrm{ch}[\lambda(x-t)]g(x)h(t)y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $y(x) = g(x)u(x)$ приводит к уравнению вида 2.9.28:

$$u(x) + \int_a^x \mathrm{ch}[\lambda(x-t)]g(t)h(t)u(t)\,dt = f(x)/g(x).$$

30. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y'_x(x) + \lambda \int_a^x \mathrm{ch}[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f'_x(x), \tag{1}$$

$$y''_{xx}(x) + \lambda g(x)y(x) + \lambda^2 \int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda\big[g(x) - \lambda\big]y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \tag{3}$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = f(a), \qquad y'_x(a) = f'_x(a). \tag{4}$$

Точные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида (3) для различных функций $g(x)$ см. в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995, 1997).

2°. Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ — два линейно независимых ($y_1/y_2 \not\equiv \mathrm{const}$) решения однородного дифференциального уравнения $y''_{xx} + \lambda\big[g(x) - \lambda\big]y = 0$, которое получается из (3) при $f(x) \equiv 0$. В данном случае детерминант Вронского является постоянной величиной:

$$W = y_1(y_2)'_x - y_2(y_1)'_x \equiv \mathrm{const}\,.$$

Решение неоднородного уравнения (3) с начальными условиями (4) для произвольной функции $f = f(x)$ имеет вид

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{W} \int_a^x \big[y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)\big]g(t)f(t)\,dt \tag{5}$$

и определяет решение исходного интегрального уравнения.

3°. Если известно только одно нетривиальное решение $y_1 = y_1(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения $y''_{xx} + \lambda\big[g(x) - \lambda\big]y = 0$, то решение неоднородного уравнения (3) с начальными условиями (4) можно найти по формуле (5), в которой следует положить

$$W = 1, \qquad y_2(x) = y_1(x) \int_b^x \frac{d\xi}{y_1^2(\xi)},$$

где b — любое.

31. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]g(x)h(t)y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $y(x) = g(x)u(x)$ приводит к уравнению вида 2.9.30:

$$u(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]g(t)h(t)u(t)\,dt = f(x)/g(x).$$

32. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \{g(x) + b\operatorname{ch}(\lambda x) + b(x-t)[\lambda\operatorname{sh}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda x)g(x)]\}y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $h(x) = b\operatorname{ch}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = [g(x) + b\operatorname{ch}(\lambda x)]\frac{G(x)}{G(t)} + \left[b^2\operatorname{ch}^2(\lambda x) + b\lambda\operatorname{sh}(\lambda x)\right]\frac{H(x)}{G(t)}\int_t^x \frac{G(s)}{H(s)}\,ds,$$

где $G(x) = \exp\left[\int_a^x g(s)\,ds\right]$, $H(x) = \exp\left[\dfrac{b}{\lambda}\operatorname{sh}(\lambda x)\right]$.

33. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \{g(x) + b\operatorname{sh}(\lambda x) + b(x-t)[\lambda\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{sh}(\lambda x)g(x)]\}y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $h(x) = b\operatorname{sh}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = [g(x) + b\operatorname{sh}(\lambda x)]\frac{G(x)}{G(t)} + \left[b^2\operatorname{sh}^2(\lambda x) + b\lambda\operatorname{ch}(\lambda x)\right]\frac{H(x)}{G(t)}\int_t^x \frac{G(s)}{H(s)}\,ds,$$

где $G(x) = \exp\left[\int_a^x g(s)\,ds\right]$, $H(x) = \exp\left[\dfrac{b}{\lambda}\operatorname{ch}(\lambda x)\right]$.

34. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \cos[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f(x).}$

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y'_x(x) + g(x)y(x) - \lambda\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f'_x(x), \tag{1}$$

$$y''_{xx}(x) + \left[g(x)y(x)\right]'_x - \lambda^2\int_a^x \cos[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + \left[g(x)y\right]'_x + \lambda^2 y = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x). \tag{3}$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = f(a), \qquad y'_x(a) = f'_x(a) - f(a)g(a). \tag{4}$$

35. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \cos[\lambda(x-t)]g(x)h(t)y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $y(x) = g(x)u(x)$ приводит к уравнению вида 2.9.34:

$$u(x) + \int_a^x \cos[\lambda(x-t)]g(t)h(t)u(t)\,dt = f(x)/g(x).$$

36. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y'_x(x) + \lambda \int_a^x \cos[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f'_x(x), \tag{1}$$

$$y''_{xx}(x) + \lambda g(x)y(x) - \lambda^2 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt = f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda\bigl[g(x) + \lambda\bigr]y = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x). \tag{3}$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = f(a), \qquad y'_x(a) = f'_x(a). \tag{4}$$

Точные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида (3) для различных функций $f(x)$ см. в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995, 1997).

2°. Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ — два линейно независимых ($y_1/y_2 \not\equiv \text{const}$) решения однородного дифференциального уравнения $y''_{xx} + \lambda\bigl[g(x) + \lambda\bigr]y = 0$, которое получается из (3) при $f(x) \equiv 0$. В данном случае детерминант Вронского является постоянной величиной:

$$W = y_1(y_2)'_x - y_2(y_1)'_x \equiv \text{const}\,.$$

Решение неоднородного уравнения (3) с начальными условиями (4) для произвольной функции $f = f(x)$ имеет вид

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{W} \int_a^x \bigl[y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)\bigr]g(t)f(t)\,dt \tag{5}$$

и определяет решение исходного интегрального уравнения.

3°. Если известно только одно нетривиальное решение $y_1 = y_1(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения $y''_{xx} + \lambda\bigl[g(x) + \lambda\bigr]y = 0$, то решение неоднородного уравнения (3) с начальными условиями (4) можно найти по формуле (5), в которой следует положить

$$W = 1, \qquad y_2(x) = y_1(x) \int_b^x \frac{d\xi}{y_1^2(\xi)},$$

где b — любое.

37. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(x)h(t)y(t)\,dt = f(x).}$

Замена $y(x) = g(x)u(x)$ приводит к уравнению вида 2.9.36:

$$u(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)h(t)u(t)\,dt = f(x)/g(x).$$

38. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \bigl\{g(x) + b\cos(\lambda x) + {}}$

$\boldsymbol{{} + b(t-x)[\lambda \sin(\lambda x) + \cos(\lambda x)g(x)]\bigr\}y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $h(x) = b\cos(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = [g(x) + b\cos(\lambda x)]\frac{G(x)}{G(t)} + \left[b^2\cos^2(\lambda x) - b\lambda\sin(\lambda x)\right]\frac{H(x)}{G(t)}\int_t^x \frac{G(s)}{H(s)}\,ds,$$

где $G(x) = \exp\left[\int_a^x g(s)\,ds\right]$, $H(x) = \exp\left[\dfrac{b}{\lambda}\sin(\lambda x)\right]$.

39. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x \{g(x) + b\sin(\lambda x) +}$

$\boldsymbol{+\, b(x-t)[\lambda\cos(\lambda x) - \sin(\lambda x)g(x)]\}y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $h(x) = b\sin(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t)\,dt,$$

$$R(x,t) = [g(x) + b\sin(\lambda x)]\frac{G(x)}{G(t)} + \left[b^2\sin^2(\lambda x) + b\lambda\cos(\lambda x)\right]\frac{H(x)}{G(t)}\int_t^x \frac{G(s)}{H(s)}\,ds,$$

где $G(x) = \exp\left[\int_a^x g(s)\,ds\right]$, $H(x) = \exp\left[-\dfrac{b}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]$.

2.9-2. Уравнения с разностным ядром: $K(x,t) = K(x-t)$

40. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x K(x-t)y(t)\,dt = f(x).}$

Уравнение восстановления.

1°. Для решения этого интегрального уравнения используют прямое и обратное преобразования Лапласа.

Решение можно представить в виде

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t)f(t)\,dt. \tag{1}$$

Здесь резольвента $R(x)$ определяется через ядро исходного уравнения $K(x)$ по формулам

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{R}(p)e^{px}\,dp,$$

$$\tilde{R}(p) = \frac{\tilde{K}(p)}{1+\tilde{K}(p)}, \qquad \tilde{K}(p) = \int_0^\infty K(x)e^{-px}\,dx.$$

⦿ *Литература*: Р. Беллман, К. Кук (1967), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), В. И. Смирнов (1974, стр. 146).

2°. Пусть $w = w(x)$ — решение вспомогательного более простого (чем исходное) уравнения при $a = 0$ и постоянной правой части $f \equiv 1$:

$$w(x) + \int_0^x K(x-t)w(t)\,dt = 1. \tag{2}$$

Тогда решение исходного интегрального уравнения при произвольной правой части $f = f(x)$ выражается через решение вспомогательного уравнения (2) по формуле

$$y(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x w(x-t)f(t)\,dt = f(a)w(x-a) + \int_a^x w(x-t)f'_t(t)\,dt.$$

⦿ *Литература*: Р. Беллман, К. Кук (1967).

41. $\boldsymbol{y(x) + \int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = 0.}$

Вид собственных функций этого интегрального уравнения определяется корнями следующего трансцендентного (алгебраического) уравнения относительно параметра λ:

$$\int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z}\,dz = -1. \tag{1}$$

Левая часть уравнения представляет собой преобразование Лапласа от ядра интегрального уравнения.

1°. Действительным (однократным) корням λ_k уравнения (1) отвечают собственные функции

$$y_k(x) = \exp(\lambda_k x).$$

2°. Действительным корням λ_k кратности r отвечают r собственных функций

$$y_{k1}(x) = \exp(\lambda_k x), \quad y_{k2}(x) = x\exp(\lambda_k x), \quad \ldots, \quad y_{kr}(x) = x^{r-1}\exp(\lambda_k x).$$

3°. Комплексным (однократным) корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ уравнения (1) отвечает пара собственных функций

$$y_k^{(1)}(x) = \exp(\alpha_k x)\cos(\beta_k x), \quad y_k^{(2)}(x) = \exp(\alpha_k x)\sin(\beta_k x).$$

4°. Комплексным корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ кратности r отвечают r пар собственных функций

$$\begin{aligned}
&y_{k1}^{(1)}(x) = \exp(\alpha_k x)\cos(\beta_k x), && y_{k1}^{(2)}(x) = \exp(\alpha_k x)\sin(\beta_k x),\\
&y_{k2}^{(1)}(x) = x\exp(\alpha_k x)\cos(\beta_k x), && y_{k2}^{(2)}(x) = x\exp(\alpha_k x)\sin(\beta_k x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_{kr}^{(1)}(x) = x^{r-1}\exp(\alpha_k x)\cos(\beta_k x), && y_{kr}^{(2)}(x) = x^{r-1}\exp(\alpha_k x)\sin(\beta_k x).
\end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения 2.9.41 представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций этого уравнения.

► *Для уравнений 2.9.42–2.9.51 приведены только частные решения. Общие решения этих уравнений можно получить, прибавив к частным решениям уравнений общее решение однородного уравнения 2.9.41.*

42. $\boldsymbol{y(x) + \int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = Ax^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots}$

Частный случай уравнения 2.9.44 при $\lambda = 0$.

1°. Решение при $n = 0$:

$$y(x) = \frac{A}{B}, \qquad B = 1 + \int_0^\infty K(z)\,dz.$$

2°. Решение при $n = 1$:

$$y(x) = \frac{A}{B}x + \frac{AC}{B^2}, \qquad B = 1 + \int_0^\infty K(z)\,dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z)\,dz.$$

3°. Решение при $n = 2$:

$$y_2(x) = \frac{A}{B}x^2 + 2\frac{AC}{B^2}x + 2\frac{AC^2}{B^3} - \frac{AD}{B^2},$$

$$B = 1 + \int_0^\infty K(z)\,dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z)\,dz, \quad D = \int_0^\infty z^2K(z)\,dz.$$

4°. Решения при $n = 3, 4, \ldots$ определяются по формулам

$$y_n(x) = A\left\{\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)}\right]\right\}_{\lambda=0}, \qquad B(\lambda) = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z}\,dz.$$

43. $\boldsymbol{y(x) + \int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = Ae^{\lambda x}.}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B}e^{\lambda x}, \qquad B = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z}\,dz.$$

Интегральное слагаемое в выражении для коэффициента B представляет собой преобразование Лапласа от функции $K(z)$ и может вычисляться с помощью таблиц преобразований Лапласа, приведенных, например, в книгах: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (т. 1, 1973), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974).

44. $\boldsymbol{y(x) + \int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = Ax^n e^{\lambda x}, \qquad n = 1, 2, \ldots}$

1°. Решение при $n = 1$:

$$y_1(x) = \frac{A}{B}xe^{\lambda x} + \frac{AC}{B^2}e^{\lambda x},$$

$$B = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z}\,dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z)e^{-\lambda z}\,dz.$$

Коэффициенты B и C удобно вычислять, используя таблицы преобразований Лапласа.

2°. Решение при $n = 2$:

$$y_2(x) = \frac{A}{B}x^2e^{\lambda x} + 2\frac{AC}{B^2}xe^{\lambda x} + \left(2\frac{AC^2}{B^3} - \frac{AD}{B^2}\right)e^{\lambda x},$$

$$B = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z}\,dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z)e^{-\lambda z}\,dz, \quad D = \int_0^\infty z^2K(z)e^{-\lambda z}\,dz.$$

3°. Решения при $n = 3, 4, \ldots$ определяются по формулам

$$y_n(x) = \frac{\partial}{\partial\lambda}y_{n-1}(x) = A\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)}\right], \qquad B(\lambda) = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z}\,dz.$$

45. $\boldsymbol{y(x) + \int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = A\,\mathrm{ch}(\lambda x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{2B_-}e^{\lambda x} + \frac{A}{2B_+}e^{-\lambda x} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B_-} + \frac{A}{B_+}\right)\mathrm{ch}(\lambda x) + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B_-} - \frac{A}{B_+}\right)\mathrm{sh}(\lambda x),$$

$$B_- = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z}\,dz, \quad B_+ = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{\lambda z}\,dz.$$

46. $\boldsymbol{y(x) + \int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = A\,\mathrm{sh}(\lambda x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{2B_-}e^{\lambda x} - \frac{A}{2B_+}e^{-\lambda x} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B_-} - \frac{A}{B_+}\right)\mathrm{ch}(\lambda x) + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B_-} + \frac{A}{B_+}\right)\mathrm{sh}(\lambda x),$$

$$B_- = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z}\,dz, \quad B_+ = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{\lambda z}\,dz.$$

47. $\boldsymbol{y(x) + \int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = A\cos(\lambda x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_\mathrm{c}^2 + B_\mathrm{s}^2}\left[B_\mathrm{c}\cos(\lambda x) - B_\mathrm{s}\sin(\lambda x)\right],$$

$$B_\mathrm{c} = 1 + \int_0^\infty K(z)\cos(\lambda z)\,dz, \quad B_\mathrm{s} = \int_0^\infty K(z)\sin(\lambda z)\,dz.$$

48. $\boldsymbol{y(x) + \int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = A\sin(\lambda x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_\mathrm{c}^2 + B_\mathrm{s}^2}\bigl[B_\mathrm{c}\sin(\lambda x) + B_\mathrm{s}\cos(\lambda x)\bigr],$$

$$B_\mathrm{c} = 1 + \int_0^\infty K(z)\cos(\lambda z)\,dz, \quad B_\mathrm{s} = \int_0^\infty K(z)\sin(\lambda z)\,dz.$$

49. $\boldsymbol{y(x) + \int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = Ae^{\mu x}\cos(\lambda x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_\mathrm{c}^2 + B_\mathrm{s}^2}e^{\mu x}\bigl[B_\mathrm{c}\cos(\lambda x) - B_\mathrm{s}\sin(\lambda x)\bigr],$$

$$B_\mathrm{c} = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{-\mu z}\cos(\lambda z)\,dz, \quad B_\mathrm{s} = \int_0^\infty K(z)e^{-\mu z}\sin(\lambda z)\,dz.$$

50. $\boldsymbol{y(x) + \int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = Ae^{\mu x}\sin(\lambda x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_\mathrm{c}^2 + B_\mathrm{s}^2}e^{\mu x}\bigl[B_\mathrm{c}\sin(\lambda x) + B_\mathrm{s}\cos(\lambda x)\bigr],$$

$$B_\mathrm{c} = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{-\mu z}\cos(\lambda z)\,dz, \quad B_\mathrm{s} = \int_0^\infty K(z)e^{-\mu z}\sin(\lambda z)\,dz.$$

51. $\boldsymbol{y(x) + \int_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Для полиномиальной правой части уравнения $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Для построения решения можно также воспользоваться формулой, приведенной в п. 4° уравнения 2.9.42.

2°. Для правой части $f(x) = e^{\lambda x}\sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n} B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Для построения решения можно также воспользоваться формулой, приведенной в п. 3° уравнения 2.9.44.

3°. Для правой части $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{B_k}\exp(\lambda_k x), \qquad B_k = 1 + \int_0^\infty K(z)\exp(-\lambda_k z)\,dz.$$

4°. Для правой части $f(x) = \cos(\lambda x) \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $f(x) = \sin(\lambda x) \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} \bigl[B_{ck} \cos(\lambda_k x) - B_{sk} \sin(\lambda_k x)\bigr],$$

$$B_{ck} = 1 + \int_0^\infty K(z) \cos(\lambda_k z)\, dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(z) \sin(\lambda_k z)\, dz.$$

7°. Для правой части $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} \bigl[B_{ck} \sin(\lambda_k x) + B_{sk} \cos(\lambda_k x)\bigr],$$

$$B_{ck} = 1 + \int_0^\infty K(z) \cos(\lambda_k z)\, dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(z) \sin(\lambda_k z)\, dz.$$

8°. Для правой части $f(x) = \cos(\lambda x) \sum\limits_{k=0}^{n} A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k B_{ck}}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} \exp(\mu_k x) - \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k B_{sk}}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} \exp(\mu_k x),$$

$$B_{ck} = 1 + \int_0^\infty K(z) \exp(-\mu_k z) \cos(\lambda z)\, dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(z) \exp(-\mu_k z) \sin(\lambda z)\, dz.$$

9°. Для правой части $f(x) = \sin(\lambda x) \sum\limits_{k=0}^{n} A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k B_{ck}}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} \exp(\mu_k x) + \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k B_{sk}}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} \exp(\mu_k x),$$

$$B_{ck} = 1 + \int_0^\infty K(z) \exp(-\mu_k z) \cos(\lambda z)\, dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(z) \exp(-\mu_k z) \sin(\lambda z)\, dz.$$

52. $\boldsymbol{y(x) + \int_x^\infty K(x-t) y(t)\, dt = 0.}$

Вид собственных функций этого интегрального уравнения определяется корнями следующего трансцендентного (алгебраического) уравнения относительно параметра λ:

$$\int_0^\infty K(-z) e^{\lambda z}\, dz = -1. \tag{1}$$

Левая часть уравнения представляет собой преобразование Лапласа с параметром $-\lambda$ от функции $K(-z)$.

1°. Действительным (однократным) корням λ_k уравнения (1) отвечают собственные функции

$$y_k(x) = \exp(\lambda_k x).$$

2°. Действительным корням λ_k кратности r отвечают r собственных функций

$$y_{k1}(x) = \exp(\lambda_k x), \quad y_{k2}(x) = x\exp(\lambda_k x), \quad \dots, \quad y_{kr}(x) = x^{r-1}\exp(\lambda_k x).$$

3°. Комплексным (однократным) корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ уравнения (1) отвечает пара собственных функций

$$y_k^{(1)}(x) = \exp(\alpha_k x)\cos(\beta_k x), \quad y_k^{(2)}(x) = \exp(\alpha_k x)\sin(\beta_k x).$$

4°. Комплексным корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ кратности r отвечают r пар собственных функций

$$\begin{aligned}
&y_{k1}^{(1)}(x) = \exp(\alpha_k x)\cos(\beta_k x), && y_{k1}^{(2)}(x) = \exp(\alpha_k x)\sin(\beta_k x),\\
&y_{k2}^{(1)}(x) = x\exp(\alpha_k x)\cos(\beta_k x), && y_{k2}^{(2)}(x) = x\exp(\alpha_k x)\sin(\beta_k x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_{kr}^{(1)}(x) = x^{r-1}\exp(\alpha_k x)\cos(\beta_k x), && y_{kr}^{(2)}(x) = x^{r-1}\exp(\alpha_k x)\sin(\beta_k x).
\end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения 2.9.52 представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций этого уравнения.

► *Для уравнений 2.9.53–2.9.62 приведены только частные решения. Общие решения этих уравнений можно получить, прибавив к частным решениям уравнений общее решение однородного уравнения 2.9.52.*

53. $\displaystyle y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = Ax^n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$

Частный случай уравнения 2.9.55 при $\lambda = 0$.

1°. Решение при $n = 0$:

$$y(x) = \frac{A}{B}, \qquad B = 1 + \int_0^\infty K(-z)\,dz.$$

2°. Решение при $n = 1$:

$$y(x) = \frac{A}{B}x - \frac{AC}{B^2}, \qquad B = 1 + \int_0^\infty K(-z)\,dz, \quad C = \int_0^\infty zK(-z)\,dz.$$

3°. Решение при $n = 2$:

$$y_2(x) = \frac{A}{B}x^2 - 2\frac{AC}{B^2}x + 2\frac{AC^2}{B^3} - \frac{AD}{B^2},$$

$$B = 1 + \int_0^\infty K(-z)\,dz, \quad C = \int_0^\infty zK(-z)\,dz, \quad D = \int_0^\infty z^2K(-z)\,dz.$$

4°. Решения при $n = 3, 4, \dots$ определяются по формулам

$$y_n(x) = A\left\{\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)}\right]\right\}_{\lambda=0}, \qquad B(\lambda) = 1 + \int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z}\,dz.$$

54. $\displaystyle y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = Ae^{\lambda x}.$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B}e^{\lambda x}, \qquad B = 1 + \int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z}\,dz = 1 + \mathfrak{L}\{K(-z), -\lambda\}.$$

Интегральное слагаемое в выражении для коэффициента B представляет собой преобразование Лапласа с параметром $-\lambda$ от функции $K(-z)$ и может быть вычислено с помощью таблиц преобразований Лапласа, приведенных, например, в книгах: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (т. 1, 1973), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974).

55. $\boldsymbol{y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = Ax^n e^{\lambda x}, \qquad n = 1, 2, \ldots}$

1°. Решение при $n = 1$:

$$y_1(x) = \frac{A}{B} x e^{\lambda x} - \frac{AC}{B^2} e^{\lambda x},$$

$$B = 1 + \int_0^\infty K(-z) e^{\lambda z}\,dz, \quad C = \int_0^\infty z K(-z) e^{\lambda z}\,dz.$$

Коэффициенты B и C удобно вычислять, используя таблицы преобразований Лапласа (при $p = -\lambda$).

2°. Решение при $n = 2$:

$$y_2(x) = \frac{A}{B} x^2 e^{\lambda x} - 2\frac{AC}{B^2} x e^{\lambda x} + \left(2\frac{AC^2}{B^3} - \frac{AD}{B^2}\right) e^{\lambda x},$$

$$B = 1 + \int_0^\infty K(-z) e^{\lambda z}\,dz, \quad C = \int_0^\infty z K(-z) e^{\lambda z}\,dz, \quad D = \int_0^\infty z^2 K(-z) e^{\lambda z}\,dz.$$

3°. Решения при $n = 3, 4, \ldots$ определяются по формулам

$$y_n(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda} y_{n-1}(x) = A \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)}\right], \qquad B(\lambda) = 1 + \int_0^\infty K(-z) e^{\lambda z}\,dz.$$

56. $\boldsymbol{y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = A\,\mathrm{ch}(\lambda x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{2B_+} e^{\lambda x} + \frac{A}{2B_-} e^{-\lambda x} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B_+} + \frac{A}{B_-}\right) \mathrm{ch}(\lambda x) + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B_+} - \frac{A}{B_-}\right) \mathrm{sh}(\lambda x),$$

$$B_+ = 1 + \int_0^\infty K(-z) e^{\lambda z}\,dz, \quad B_- = 1 + \int_0^\infty K(-z) e^{-\lambda z}\,dz.$$

57. $\boldsymbol{y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = A\,\mathrm{sh}(\lambda x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{2B_+} e^{\lambda x} - \frac{A}{2B_-} e^{-\lambda x} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B_+} - \frac{A}{B_-}\right) \mathrm{ch}(\lambda x) + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B_+} + \frac{A}{B_-}\right) \mathrm{sh}(\lambda x),$$

$$B_+ = 1 + \int_0^\infty K(-z) e^{\lambda z}\,dz, \quad B_- = 1 + \int_0^\infty K(-z) e^{-\lambda z}\,dz.$$

58. $\boldsymbol{y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = A\cos(\lambda x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_\mathrm{c}^2 + B_\mathrm{s}^2} \left[B_\mathrm{c} \cos(\lambda x) + B_\mathrm{s} \sin(\lambda x)\right],$$

$$B_\mathrm{c} = 1 + \int_0^\infty K(-z) \cos(\lambda z)\,dz, \quad B_\mathrm{s} = \int_0^\infty K(-z) \sin(\lambda z)\,dz.$$

59. $\boldsymbol{y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t)\,dt = A\sin(\lambda x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_\mathrm{c}^2 + B_\mathrm{s}^2} \left[B_\mathrm{c} \sin(\lambda x) - B_\mathrm{s} \cos(\lambda x)\right],$$

$$B_\mathrm{c} = 1 + \int_0^\infty K(-z) \cos(\lambda z)\,dz, \quad B_\mathrm{s} = \int_0^\infty K(-z) \sin(\lambda z)\,dz.$$

60. $\boldsymbol{y(x) + \int_x^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = Ae^{\mu x}\cos(\lambda x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_{\rm c}^2 + B_{\rm s}^2} e^{\mu x}\bigl[B_{\rm c}\cos(\lambda x) + B_{\rm s}\sin(\lambda x)\bigr],$$

$$B_{\rm c} = 1 + \int_0^{\infty} K(-z)e^{\mu z}\cos(\lambda z)\,dz, \quad B_{\rm s} = \int_0^{\infty} K(-z)e^{\mu z}\sin(\lambda z)\,dz.$$

61. $\boldsymbol{y(x) + \int_x^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = Ae^{\mu x}\sin(\lambda x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_{\rm c}^2 + B_{\rm s}^2} e^{\mu x}\bigl[B_{\rm c}\sin(\lambda x) - B_{\rm s}\cos(\lambda x)\bigr],$$

$$B_{\rm c} = 1 + \int_0^{\infty} K(-z)e^{\mu z}\cos(\lambda z)\,dz, \quad B_{\rm s} = \int_0^{\infty} K(-z)e^{\mu z}\sin(\lambda z)\,dz.$$

62. $\boldsymbol{y(x) + \int_x^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = f(x).}$

1°. Для полиномиальной правой части уравнения $f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Для построения решения можно также воспользоваться формулой, приведенной в п. 4° уравнения 2.9.53.

2°. Для правой части $f(x) = e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n} B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Для построения решения можно также воспользоваться формулой, приведенной в п. 3° уравнения 2.9.55.

3°. Для правой части $f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{B_k}\exp(\lambda_k x), \qquad B_k = 1 + \int_0^{\infty} K(-z)\exp(\lambda_k z)\,dz.$$

4°. Для правой части $f(x) = \cos(\lambda x)\sum_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x)\sum_{k=0}^{n} B_k x^k + \sin(\lambda x)\sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $f(x) = \sin(\lambda x)\sum_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x)\sum_{k=0}^{n} B_k x^k + \sin(\lambda x)\sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} A_k\cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{B_{\mathrm{c}k}^2+B_{\mathrm{s}k}^2}\bigl[B_{\mathrm{c}k}\cos(\lambda_k x)+B_{\mathrm{s}k}\sin(\lambda_k x)\bigr],$$

$$B_{\mathrm{c}k}=1+\int_0^\infty K(-z)\cos(\lambda_k z)\,dz,\quad B_{\mathrm{s}k}=\int_0^\infty K(-z)\sin(\lambda_k z)\,dz.$$

7°. Для правой части $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} A_k\sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{B_{\mathrm{c}k}^2+B_{\mathrm{s}k}^2}\bigl[B_{\mathrm{c}k}\sin(\lambda_k x)-B_{\mathrm{s}k}\cos(\lambda_k x)\bigr],$$

$$B_{\mathrm{c}k}=1+\int_0^\infty K(-z)\cos(\lambda_k z)\,dz,\quad B_{\mathrm{s}k}=\int_0^\infty K(-z)\sin(\lambda_k z)\,dz.$$

8°. Для правой части $f(x)=\cos(\lambda x)\sum\limits_{k=0}^{n} A_k\exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\cos(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}\frac{A_kB_{\mathrm{c}k}}{B_{\mathrm{c}k}^2+B_{\mathrm{s}k}^2}\exp(\mu_k x)+\sin(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}\frac{A_kB_{\mathrm{s}k}}{B_{\mathrm{c}k}^2+B_{\mathrm{s}k}^2}\exp(\mu_k x),$$

$$B_{\mathrm{c}k}=1+\int_0^\infty K(-z)\exp(\mu_k z)\cos(\lambda z)\,dz,\quad B_{\mathrm{s}k}=\int_0^\infty K(-z)\exp(\mu_k z)\sin(\lambda z)\,dz.$$

9°. Для правой части $f(x)=\sin(\lambda x)\sum\limits_{k=0}^{n} A_k\exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sin(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}\frac{A_kB_{\mathrm{c}k}}{B_{\mathrm{c}k}^2+B_{\mathrm{s}k}^2}\exp(\mu_k x)-\cos(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}\frac{A_kB_{\mathrm{s}k}}{B_{\mathrm{c}k}^2+B_{\mathrm{s}k}^2}\exp(\mu_k x),$$

$$B_{\mathrm{c}k}=1+\int_0^\infty K(-z)\exp(\mu_k z)\cos(\lambda z)\,dz,\quad B_{\mathrm{s}k}=\int_0^\infty K(-z)\exp(\mu_k z)\sin(\lambda z)\,dz.$$

10°. В общем случае для произвольной правой части $f=f(x)$ решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$y(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\tilde f(p)}{1+\tilde k(-p)}e^{px}\,dp,$$

$$\tilde f(p)=\int_0^\infty f(x)e^{-px}\,dx,\qquad \tilde k(-p)=\int_0^\infty K(-z)e^{pz}\,dz.$$

Для вычисления $\tilde f(p)$, $\tilde k(-p)$ удобно использовать таблицы преобразований Лапласа, а для определения $y(x)$ — таблицы обратных преобразований Лапласа.

2.9-3. Другие уравнения

63. $\displaystyle y(x)+\int_0^x\frac{1}{x}f\Bigl(\frac{t}{x}\Bigr)y(t)\,dt=0.$

Вид собственных функций этого интегрального уравнения определяется корнями следующего трансцендентного (алгебраического) уравнения относительно параметра λ:

$$\int_0^1 f(z)z^\lambda\,dz=-1. \qquad (1)$$

1°. Действительным (однократным) корням λ_k уравнения (1) отвечают собственные функции

$$y_k(x) = x^{\lambda_k}.$$

2°. Действительным корням λ_k кратности r отвечают r собственных функций

$$y_{k1}(x) = x^{\lambda_k}, \quad y_{k2}(x) = x^{\lambda_k} \ln x, \quad \ldots, \quad y_{kr}(x) = x^{\lambda_k} \ln^{r-1} x.$$

3°. Комплексным (однократным) корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ уравнения (1) отвечает пара собственных функций

$$y_k^{(1)}(x) = x^{\alpha_k} \cos(\beta_k \ln x), \quad y_k^{(2)}(x) = x^{\alpha_k} \sin(\beta_k \ln x).$$

4°. Комплексным корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ кратности r отвечают r пар собственных функций

$$\begin{aligned}
&y_{k1}^{(1)}(x) = x^{\alpha_k} \cos(\beta_k \ln x), && y_{k1}^{(2)}(x) = x^{\alpha_k} \sin(\beta_k \ln x),\\
&y_{k2}^{(1)}(x) = x^{\alpha_k} \ln x \cos(\beta_k \ln x), && y_{k2}^{(2)}(x) = x^{\alpha_k} \ln x \sin(\beta_k \ln x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_{kr}^{(1)}(x) = x^{\alpha_k} \ln^{r-1} x \cos(\beta_k \ln x), && y_{kr}^{(2)}(x) = x^{\alpha_k} \ln^{r-1} x \sin(\beta_k \ln x).
\end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения 2.9.63 представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций этого уравнения.

► *Для уравнений 2.9.64–2.9.71 приведены только частные решения. Общие решения этих уравнений можно получить, прибавив к частным решениям уравнений общее решение однородного уравнения 2.9.63.*

64. $\displaystyle \boldsymbol{y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t)\,dt = Ax + B.}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{1 + I_1} x + \frac{B}{1 + I_0}, \qquad I_0 = \int_0^1 f(t)\,dt, \quad I_1 = \int_0^1 t f(t)\,dt.$$

65. $\displaystyle \boldsymbol{y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t)\,dt = Ax^\beta.}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B} x^\beta, \qquad B = 1 + \int_0^1 f(t) t^\beta\,dt.$$

66. $\displaystyle \boldsymbol{y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t)\,dt = A \ln x + B.}$

Решение:

$$y(x) = p \ln x + q,$$

где

$$p = \frac{A}{1 + I_0}, \quad q = \frac{B}{1 + I_0} - \frac{A I_l}{(1 + I_0)^2}, \qquad I_0 = \int_0^1 f(t)\,dt, \quad I_l = \int_0^1 f(t) \ln t\,dt.$$

67. $\displaystyle \boldsymbol{y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t)\,dt = Ax^\beta \ln x.}$

Решение:

$$y(x) = p x^\beta \ln x + q x^\beta,$$

где

$$p = \frac{A}{1 + I_1}, \quad q = -\frac{A I_2}{(1 + I_1)^2}, \qquad I_1 = \int_0^1 f(t) t^\beta\,dt, \quad I_2 = \int_0^1 f(t) t^\beta \ln t\,dt.$$

68. $\boldsymbol{y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t)\, dt = A\cos(\ln x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{AI_\mathrm{c}}{I_\mathrm{c}^2 + I_\mathrm{s}^2}\cos(\ln x) + \frac{AI_\mathrm{s}}{I_\mathrm{c}^2 + I_\mathrm{s}^2}\sin(\ln x),$$
$$I_\mathrm{c} = 1 + \int_0^1 f(t)\cos(\ln t)\, dt, \quad I_\mathrm{s} = \int_0^1 f(t)\sin(\ln t)\, dt.$$

69. $\boldsymbol{y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t)\, dt = A\sin(\ln x).}$

Решение:

$$y(x) = -\frac{AI_\mathrm{s}}{I_\mathrm{c}^2 + I_\mathrm{s}^2}\cos(\ln x) + \frac{AI_\mathrm{c}}{I_\mathrm{c}^2 + I_\mathrm{s}^2}\sin(\ln x),$$
$$I_\mathrm{c} = 1 + \int_0^1 f(t)\cos(\ln t)\, dt, \quad I_\mathrm{s} = \int_0^1 f(t)\sin(\ln t)\, dt.$$

70. $\boldsymbol{y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t)\, dt = Ax^\beta\cos(\ln x) + Bx^\beta\sin(\ln x).}$

Решение:

$$y(x) = px^\beta\cos(\ln x) + qx^\beta\sin(\ln x),$$

где

$$p = \frac{AI_\mathrm{c} - BI_\mathrm{s}}{I_\mathrm{c}^2 + I_\mathrm{s}^2}, \quad q = \frac{AI_\mathrm{s} + BI_\mathrm{c}}{I_\mathrm{c}^2 + I_\mathrm{s}^2},$$
$$I_\mathrm{c} = 1 + \int_0^1 f(t)t^\beta\cos(\ln t)\, dt, \quad I_\mathrm{s} = \int_0^1 f(t)t^\beta\sin(\ln t)\, dt.$$

71. $\boldsymbol{y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t)\, dt = g(x).}$

1°. Для правой части полиномиального вида

$$g(x) = \sum_{n=0}^N A_n x^n$$

ограниченное в нуле решение интегрального уравнения определяется формулами

$$y(x) = \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{1 + f_n} x^n, \qquad f_n = \int_0^1 f(z)z^n\, dz.$$

Считается, что $f_0 < \infty$, $f_n \neq -1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Если при каком-нибудь значении n имеет место равенство $f_n = -1$, то решение отличается одним слагаемым и имеет вид

$$y(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{A_m}{1 + f_m} x^m + \sum_{m=n+1}^N \frac{A_m}{1 + f_m} x^m + \frac{A_n}{\bar{f}_n} x^n \ln x, \qquad \bar{f}_n = \int_0^1 f(z)z^n \ln z\, dz.$$

Для произвольной правой части $g(x)$, разлагающейся в степенной ряд, можно использовать формулы п. 1°, в которых следует положить $N = \infty$. При этом радиус сходимости полученного решения $y(x)$ будет равен радиусу сходимости ряда для функции $g(x)$.

2°. Для правой части уравнения $g(x)=\ln x\sum\limits_{k=0}^{n}A_kx^k$ решение имеет вид

$$y(x)=\ln x\sum_{k=0}^{n}B_kx^k+\sum_{k=0}^{n}C_kx^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}A_k(\ln x)^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}B_k(\ln x)^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\cos(\lambda_k\ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}B_k\cos(\lambda_k\ln x)+\sum_{k=1}^{n}C_k\sin(\lambda_k\ln x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\sin(\lambda_k\ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}B_k\cos(\lambda_k\ln x)+\sum_{k=1}^{n}C_k\sin(\lambda_k\ln x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для произвольной правой части $g(x)$ преобразование

$$x=e^{-z},\quad t=e^{-\tau},\quad y(x)=e^zw(z),\quad f(\xi)=F(\ln\xi),\quad g(x)=e^zG(z)$$

приводит к уравнению с разностным ядром вида 2.9.62:

$$w(z)+\int_z^{\infty}F(z-\tau)w(\tau)\,d\tau=G(z).$$

7°. Для произвольной правой части $g(x)$ решение интегрального уравнения можно выразить с помощью обратного преобразования Меллина.

2.10. Некоторые формулы

Пусть решение интегрального уравнения

$$y(x)+\int_a^x K(x,t)y(t)\,dt=f(x)$$

дается формулой

$$y(x)=f(x)+\int_a^x R(x,t)f(t)\,dt.$$

Тогда решение более сложного интегрального уравнения

$$y(x)+\int_a^x K(x,t)\frac{g(x)}{g(t)}y(t)\,dt=f(x) \qquad (1)$$

дается формулой

$$y(x)=f(x)+\int_a^x R(x,t)\frac{g(x)}{g(t)}f(t)\,dt. \qquad (2)$$

Часто встречаются уравнения вида (1) при $g(x)=e^{\lambda x}$ и $g(x)=x^{\lambda}$.

3. Линейные уравнения первого рода с постоянными пределами интегрирования

► ***Обозначения:*** *$f=f(x)$, $g=g(x)$, $h=h(x)$, $K=K(x)$, $M=M(x)$ — произвольные функции (вместо x у функций может быть сложный аргумент, зависящий от двух переменных x и t); A, B, C, a, b, c, k, α, β, γ, λ, μ — свободные параметры; n — целое неотрицательное число.*

3.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции

3.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t

1. $\displaystyle\int_0^1 |x-t|\,y(t)\,dt = f(x).$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_0^x (x-t)y(t)\,dt + \int_x^1 (t-x)y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по x, имеем

$$\int_0^x y(t)\,dt - \int_x^1 y(t)\,dt = f'_x(x). \tag{2}$$

Дифференцируя (2), находим решение

$$y(x) = \tfrac{1}{2} f''_{xx}(x). \tag{3}$$

2°. Покажем, что правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) $x=0$ и $x=1$, имеем два следствия: $\displaystyle\int_0^1 ty(t)\,dt = f(0)$, $\displaystyle\int_0^1 (1-t)y(t)\,dt = f(1)$, которые можно записать в виде

$$\int_0^1 ty(t)\,dt = f(0), \qquad \int_0^1 y(t)\,dt = f(0)+f(1). \tag{4}$$

Подставим в эти равенства функцию $y(x)$ из (3). После интегрирования по частям получим соотношения: $f'_x(1)=f(1)+f(0)$, $f'_x(1)-f'_x(0)=2f(1)+2f(0)$. Отсюда имеем искомые условия для функции $f(x)$:

$$f'_x(1) = f(0)+f(1), \qquad f'_x(0)+f'_x(1) = 0. \tag{5}$$

Условия (5) позволяют найти допустимый общий вид правой части интегрального уравнения

$$f(x) = F(x) + Ax + B,$$
$$A = -\tfrac{1}{2}\bigl[F'_x(1)+F'_x(0)\bigr], \quad B = \tfrac{1}{2}\bigl[F'_x(1)-F(1)-F(0)\bigr],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция с ограниченной первой производной.

В разд. 3.1 ядра рассматриваемых интегральных уравнений могут содержать как степенные функции, так и модули степенных функций.

2. $\displaystyle\int_a^b |x-t|\,y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 \leqslant a < b < \infty.$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x)=x$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2} f''_{xx}(x).$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Общий вид правой части имеет вид

$$f(x) = F(x) + Ax + B,$$
$$A = -\tfrac{1}{2}\bigl[F'_x(a) + F'_x(b)\bigr], \quad B = \tfrac{1}{2}\bigl[aF'_x(a) + bF'_x(b) - F(a) - F(b)\bigr],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

3. $\displaystyle\int_0^a |\lambda x-t|\,y(t)\,dt = f(x), \qquad \lambda > 0.$

Здесь $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant a$.

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_0^{\lambda x} (\lambda x - t)y(t)\,dt + \int_{\lambda x}^a (t-\lambda x)y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по x, имеем

$$\lambda \int_0^{\lambda x} y(t)\,dt - \lambda \int_{\lambda x}^a y(t)\,dt = f'_x(x). \tag{2}$$

Дифференцируя (2), получим $2\lambda^2 y(\lambda x) = f''_{xx}(x)$. Отсюда находим решение

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda^2} f''_{xx}\Bigl(\frac{x}{\lambda}\Bigr). \tag{3}$$

2°. Покажем, что правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) и (2) $x=0$, имеем два следствия:

$$\int_0^a ty(t)\,dt = f(0), \qquad \lambda\int_0^a y(t)\,dt = -f'_x(0). \tag{4}$$

Подставим в эти равенства функцию $y(x)$ из (3). После интегрирования по частям получим искомые условия для функции $f(x)$:

$$(a/\lambda)f'_x(a/\lambda) = f(0) + f(a/\lambda), \qquad f'_x(0) + f'_x(a/\lambda) = 0. \tag{5}$$

Условия (5) позволяют найти допустимый общий вид правой части интегрального уравнения:

$$f(x) = F(z) + Az + B, \qquad z = \lambda x;$$
$$A = -\tfrac{1}{2}\bigl[F'_z(a) + F'_z(0)\bigr], \quad B = \tfrac{1}{2}\bigl[aF'_z(a) - F(a) - F(0)\bigr],$$

где $F(z)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

4. $\displaystyle\int_0^a |x-\lambda t|\,y(t)\,dt = f(x), \qquad \lambda > 0.$

Здесь $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant a$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}\lambda f''_{xx}(\lambda x).$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять следующим соотношениям:

$$a\lambda f'_x(a\lambda) = f(0) + f(a\lambda), \qquad f'_x(0) + f'_x(a\lambda) = 0.$$

Отсюда находим допустимый общий вид правой части

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \quad A = -\tfrac{1}{2}\bigl[F'_x(\lambda a) + F'_x(0)\bigr], \quad B = \tfrac{1}{2}\bigl[a\lambda F'_x(a\lambda) - F(\lambda a) - F(0)\bigr],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

3.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t

5. $\displaystyle\int_0^a \left|Ax + Bx^2 - t\right| y(t)\,dt = f(x), \qquad A > 0, \quad B > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x) = Ax + Bx^2$.

6. $\displaystyle\int_0^a \left|x - At - Bt^2\right| y(t)\,dt = f(x), \qquad A > 0, \quad B > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(x) = At + Bt^2$.

7. $\displaystyle\int_a^b \left|xt - t^2\right| y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 \leqslant a < b < \infty.$

Замена $w(t) = ty(t)$ приводит к уравнению вида 3.1.2:

$$\int_a^b |x - t| w(t)\,dt = f(x).$$

8. $\displaystyle\int_a^b \left|x^2 - t^2\right| y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = x^2$.

Решение: $y(x) = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f'_x(x)}{4x}\right]$. Правая часть уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям, указанным в 3.8.3.

9. $\displaystyle\int_0^a \left|x^2 - \beta t^2\right| y(t)\,dt = f(x), \qquad \beta > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = x^2$, $\beta = \lambda^2$.

10. $\displaystyle\int_0^a \left|Ax + Bx^2 - A\lambda t - B\lambda^2 t^2\right| y(t)\,dt = f(x), \qquad \lambda > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = Ax + Bx^2$.

3.1-3. Ядра уравнений содержат целые степени аргументов x, t

11. $\displaystyle\int_a^b |x - t|^3 y(t)\,dt = f(x).$

Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_a^x (x - t)^3 y(t)\,dt + \int_x^b (t - x)^3 y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) дважды, имеем

$$6\int_a^x (x - t) y(t)\,dt + 6\int_x^b (t - x) y(t)\,dt = f''_{xx}(x).$$

Это уравнение можно записать в виде 3.1.2:

$$\int_a^b |x - t|\, y(t)\,dt = \tfrac{1}{6} f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Поэтому его решение интегрального уравнения дается формулой

$$y(x) = \tfrac{1}{12} y''''_{xxxx}(x). \tag{3}$$

Правая часть интегрального уравнения должна удовлетворять определенным условиям, которые получаются из (1) при $x = a$ и $x = b$ и из (2) при $x = a$ и $x = b$ в результате подстановки в них решения (3) с последующим интегрированием по частям.

12. $\displaystyle\int_a^b \left|x^3 - t^3\right| y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = x^3$.

13. $\displaystyle\int_a^b \left|xt^2 - t^3\right| y(t)\,dt = f(x) \qquad 0 \leqslant a < b < \infty.$

Замена $w(t) = t^2 y(t)$ приводит к уравнению вида 3.1.2:

$$\int_a^b |x - t| w(t)\,dt = f(x).$$

14. $\displaystyle\int_a^b \left|x^2 t - t^3\right| y(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(t) = |t|\,y(t)$ приводит к уравнению вида 3.1.8:

$$\int_a^b \left|x^2 - t^2\right| w(t)\,dt = f(x).$$

15. $\displaystyle\int_0^a \left|x^3 - \beta t^3\right| y(t)\,dt = f(x), \qquad \beta > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = x^3$, $\beta = \lambda^3$.

16. $\displaystyle\int_a^b \left|x - t\right|^{2n+1} y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2(2n+1)!} f_x^{(2n+2)}(x). \tag{1}$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным условиям, которые получаются в результате подстановки решения (1) в равенства (с последующим интегрированием по частям)

$$\int_a^b (t-a)^{2n+1} y(t)\,dt = f(a), \qquad \int_a^b (t-a)^{2n-k} y(t)\,dt = \frac{(-1)^{k+1}}{A_k} f_x^{(k+1)}(a),$$
$$A_k = (2n+1)(2n)\ldots(2n+1-k); \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n.$$

3.1-4. Ядро уравнения содержит рациональную функцию

17. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y(t)\,dt}{x+t} = f(x).$

Левая часть этого уравнения представляет собой преобразование Стилтьеса.

1°. Положим

$$x = e^z, \quad t = e^\tau, \quad y(t) = e^{-\tau/2} w(\tau), \quad f(x) = e^{-z/2} g(z).$$

В результате получим интегральное уравнение с разностным ядром вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(\tau)\,d\tau}{2\operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(z-\tau)\right]} = g(z),$$

решение которого дается формулой

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}(\pi u)\,\tilde{g}(u) e^{iux}\,du, \qquad \tilde{g}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-iuz}\,dz.$$

⦿ *Литература*: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 30).

2°. При некоторых допущениях решение исходного уравнения можно представить в виде (вещественное обращение преобразования Стилтьеса):

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,(n+1)!} \bigl[x^{2n+1} f_x^{(n)}(x)\bigr]_x^{(n+1)}. \tag{1}$$

Другая форма представления решения:

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2\pi} \Bigl(\frac{e}{n}\Bigr)^{2n} \bigl[x^{2n} f_x^{(n)}(x)\bigr]_x^{(n)}. \tag{2}$$

Для получения приближенного решения интегрального уравнения в формулах (1) и (2) вместо предела ограничиваются заданием конкретного значения n.

⦿ *Литература*: И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер (1958).

3.1-5. Ядра уравнений содержат квадратные корни

18. $\displaystyle\int_0^a \bigl|\sqrt{x} - \sqrt{t}\,\bigr|\, y(t)\, dt = f(x), \qquad 0 < a < \infty.$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \sqrt{x}$.
Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx}\bigl[\sqrt{x}\, f_x'(x)\bigr].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Общий вид правой части имеет вид

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \qquad A = -F_x'(a), \quad B = \tfrac{1}{2}\bigl[aF_x'(a) - F(a) - F(0)\bigr],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

19. $\displaystyle\int_0^a \bigl|\sqrt{x} - \beta\sqrt{t}\,\bigr|\, y(t)\, dt = f(x), \qquad \beta > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = \sqrt{x}$, $\beta = \sqrt{\lambda}$.

20. $\displaystyle\int_0^a \bigl|\sqrt{x} - t\bigr|\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x) = \sqrt{x}$ (см. п. 3°).

21. $\displaystyle\int_0^a \bigl|x - \sqrt{t}\,\bigr|\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(t) = \sqrt{t}$ (см. п. 3°).

22. $\displaystyle\int_0^a \frac{y(t)}{\sqrt{|x-t|}}\, dt = f(x), \qquad 0 < a \leqslant \infty.$

Частный случай уравнения 3.1.29 при $k = \frac{1}{2}$.
Решение:

$$y(x) = -\frac{A}{x^{1/4}} \frac{d}{dx}\left[\int_x^a \frac{dt}{(t-x)^{1/4}} \int_0^t \frac{f(s)\, ds}{s^{1/4}(t-s)^{1/4}}\right], \qquad A = \frac{1}{\sqrt{8\pi}\,\Gamma^2(3/4)}.$$

23. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{\sqrt{|x-t|}}\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.1.34 при $\lambda = \frac{1}{2}$.
Решение:

$$y(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) - f(t)}{|x-t|^{3/2}}\, dt.$$

3.1-6. Ядра уравнений содержат произвольные степени

24. $\displaystyle\int_0^a |x^k - t^k|\, y(t)\, dt = f(x), \qquad 0 < k < 1, \quad 0 < a < \infty.$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_0^x (x^k - t^k) y(t)\, dt + \int_x^a (t^k - x^k) y(t)\, dt = f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по x, имеем

$$kx^{k-1} \int_0^x y(t)\, dt - kx^{k-1} \int_x^a y(t)\, dt = f'_x(x). \tag{2}$$

Поделим обе части (2) на kx^{k-1} и продифференцируем полученное выражение. В итоге находим решение

$$y(x) = \frac{1}{2k} \frac{d}{dx} \bigl[x^{1-k} f'_x(x)\bigr]. \tag{3}$$

2°. Покажем, что правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) $x = 0$ и $x = a$, имеем два следствия: $\int_0^a t^k y(t)\, dt = f(0)$, $\int_0^a (a^k - t^k) y(t)\, dt = f(a)$, которые можно записать в виде

$$\int_0^a t^k y(t)\, dt = f(0), \qquad a^k \int_0^a y(t)\, dt = f(0) + f(a). \tag{4}$$

Подставим в эти равенства функцию $y(x)$ из (3). После интегрирования по частям получим соотношения: $af'_x(a) = kf(a) + kf(0)$, $af'_x(a) = 2kf(a) + 2kf(0)$. Отсюда имеем искомые условия для функции $f(x)$:

$$f(0) + f(a) = 0, \qquad f'_x(a) = 0. \tag{5}$$

Условия (5) позволяют найти допустимый общий вид правой части интегрального уравнения

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \qquad A = -F'_x(a), \quad B = \tfrac{1}{2}\bigl[aF'_x(a) - F(a) - F(0)\bigr],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция с ограниченной первой производной. Первая производная может быть и неограниченной при $x = 0$; в этом случае должно выполняться условие: $\bigl[x^{1-k} F'_x\bigr]_{x=0} = 0$.

25. $\displaystyle\int_0^a |x^k - \beta t^k|\, y(t)\, dt = f(x), \qquad 0 < k < 1, \quad \beta > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = x^k$, $\beta = \lambda^k$.

26. $\displaystyle\int_0^a |x^k t^m - t^{k+m}|\, y(t)\, dt = f(x), \qquad 0 < k < 1, \quad 0 < a < \infty.$

Замена $w(t) = t^m y(t)$ приводит к уравнению вида 3.1.24:

$$\int_0^a |x^k - t^k| w(t)\, dt = f(x).$$

27. $\displaystyle\int_0^1 |x^k - t^m|\, y(t)\, dt = f(x), \qquad k > 0, \quad m > 0.$

Преобразование

$$z = x^k, \quad \tau = t^m, \quad w(\tau) = \tau^{\frac{1-m}{m}} y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.1.1:

$$\int_0^1 |z - \tau| w(\tau)\, d\tau = F(z), \qquad F(z) = mf(z^{1/k}).$$

28. $\displaystyle\int_a^b |x-t|^{1+\lambda} y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 \leqslant \lambda < 1.$

При $\lambda = 0$ см. уравнение 3.1.2. Пусть $0 < \lambda < 1$.

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_a^x (x-t)^{1+\lambda} y(t)\,dt + \int_x^b (t-x)^{1+\lambda} y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Продифференцируем (1) дважды по x, а затем поделим обе части на $\lambda(\lambda+1)$. В результате имеем

$$\int_a^x (x-t)^{\lambda-1} y(t)\,dt + \int_x^b (t-x)^{\lambda-1} y(t)\,dt = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Перепишем (2) в виде уравнения

$$\int_a^b \frac{y(t)\,dt}{|x-t|^k} = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} f''_{xx}(x), \qquad k = 1-\lambda, \tag{3}$$

решение которого при различных а, b см. в 3.1.29, 3.1.30.

2°. Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\int_a^b (t-a)^{1+\lambda} y(t)\,dt = f(a), \qquad \int_a^b (b-t)^{1+\lambda} y(t)\,dt = f(b). \tag{4}$$

Подставляя в равенства (4) решение $y(x)$ уравнения (3) и интегрируя по частям, можно получить искомые условия для функции $f(x)$.

29. $\displaystyle\int_0^a \frac{y(t)}{|x-t|^k}\,dt = f(x), \qquad 0 < k < 1, \quad 0 < a \leqslant \infty.$

1°. Решение:

$$y(x) = -Ax^{\frac{k-1}{2}} \frac{d}{dx}\left[\int_x^a \frac{t^{\frac{1-2k}{2}}\,dt}{(t-x)^{\frac{1-k}{2}}} \int_0^t \frac{f(s)\,ds}{s^{\frac{1-k}{2}}(t-s)^{\frac{1-k}{2}}}\right],$$

$$A = \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)\Gamma(k)\left[\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\right]^{-2},$$

где $\Gamma(k)$ — гамма-функция.

2°. Преобразование $x = z^2$, $t = \xi^2$, $w(\xi) = 2\xi y(t)$ приводит к уравнению вида 3.1.31:

$$\int_0^{\sqrt{a}} \frac{w(\xi)}{|z^2-\xi^2|^k}\,d\xi = f(z^2).$$

30. $\displaystyle\int_a^b \frac{y(t)}{|x-t|^k}\,dt = f(x), \qquad 0 < k < 1.$

Считается, что $|a| + |b| < \infty$. Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{ctg}\left(\tfrac{1}{2}\pi k\right)\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-k}} - \frac{1}{\pi^2}\cos^2\left(\tfrac{1}{2}\pi k\right)\int_a^x \frac{Z(t)F(t)}{(x-t)^{1-k}}\,dt,$$

где

$$Z(t) = (t-a)^{\frac{1+k}{2}}(b-t)^{\frac{1-k}{2}}, \quad F(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_a^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^k}\int_\tau^b \frac{f(s)\,ds}{Z(s)(s-\tau)^{1-k}}\right].$$

⊙ *Литература*: Ф. Д. Гахов (1977, стр. 580).

31. $\displaystyle\int_0^a \frac{y(t)}{|x^2 - t^2|^k}\,dt = f(x), \qquad 0 < k < 1, \quad 0 < a \leqslant \infty.$

Решение:

$$y(x) = -\frac{2\Gamma(k)\cos\left(\frac{1}{2}\pi k\right)}{\pi\left[\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\right]^2} x^{k-1}\frac{d}{dx}\int_x^a \frac{t^{2-2k}F(t)\,dt}{(t^2 - x^2)^{\frac{1-k}{2}}}, \qquad F(t) = \int_0^t \frac{s^k f(s)\,ds}{(t^2 - s^2)^{\frac{1-k}{2}}}.$$

⦿ *Литература*: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 34).

32. $\displaystyle\int_a^b \frac{y(t)}{|x^\lambda - t^\lambda|^k}\,dt = f(x), \qquad 0 < k < 1, \quad \lambda > 0.$

1°. Преобразование

$$z = x^\lambda, \quad \tau = t^\lambda, \quad w(\tau) = \tau^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.1.30:

$$\int_A^B \frac{w(\tau)}{|z - \tau|^k}\,d\tau = F(z),$$

где $A = a^\lambda$, $B = b^\lambda$, $F(z) = \lambda f(z^{1/\lambda})$.

2°. Решение при $a = 0$:

$$y(x) = -Ax^{\frac{\lambda(k-1)}{2}}\frac{d}{dx}\left[\int_x^b \frac{t^{\frac{\lambda(3-2k)-2}{2}}\,dt}{(t^\lambda - x^\lambda)^{\frac{1-k}{2}}}\int_0^t \frac{s^{\frac{\lambda(k+1)-2}{2}} f(s)\,ds}{(t^\lambda - s^\lambda)^{\frac{1-k}{2}}}\right],$$

$$A = \frac{\lambda^2}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)\Gamma(k)\left[\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\right]^{-2},$$

где $\Gamma(k)$ — гамма-функция.

33. $\displaystyle\int_0^1 \frac{y(t)}{|x^\lambda - t^m|^k}\,dt = f(x), \qquad 0 < k < 1, \quad \lambda > 0, \quad m > 0.$

Преобразование

$$z = x^\lambda, \quad \tau = t^m, \quad w(\tau) = \tau^{\frac{1-m}{m}} y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.1.30:

$$\int_0^1 \frac{w(\tau)}{|z - \tau|^k}\,d\tau = F(z), \qquad F(z) = mf(z^{1/\lambda}).$$

34. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{|x - t|^{1-\lambda}}\,dt = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x) - f(t)}{|x - t|^{1+\lambda}}\,dt.$$

Считается, что выполняется условие: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx < \infty$, где $1 < p < 1/\lambda$.

⦿ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 455).

35. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{|x^3 - t|^{1-\lambda}}\,dt = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Замена $z = x^3$ приводит к уравнению вида 3.1.34:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y(t)}{|z - t|^{1-\lambda}}\,dt = f\left(z^{1/3}\right).$$

36. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{|x^3 - t^3|^{1-\lambda}}\,dt = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Преобразование

$$z = x^3, \quad \tau = t^3, \quad w(\tau) = \tau^{-2/3} y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.1.34:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(\tau)}{|z-\tau|^{1-\lambda}}\,d\tau = F(z), \qquad F(z) = 3f\bigl(z^{1/3}\bigr).$$

37. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\lambda}}\,y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{ctg}\Bigl(\frac{\pi\lambda}{2}\Bigr)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)-f(t)}{|x-t|^{1+\lambda}}\operatorname{sign}(x-t)\,dt.$$

⊙ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 455).

38. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a + b\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\lambda}}\,y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda\sin(\pi\lambda)}{4\pi\bigl[a^2\cos^2\bigl(\frac{1}{2}\pi\lambda\bigr) + b^2\sin^2\bigl(\frac{1}{2}\pi\lambda\bigr)\bigr]}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a + b\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1+\lambda}}\bigl[f(x)-f(t)\bigr]\,dt.$$

⊙ *Литература*: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 454).

39. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{y(t)\,dt}{(ax+bt)^k} = f(x), \qquad a > 0, \quad b > 0, \quad k > 0.$

Положим

$$x = \frac{1}{2a}e^{2z}, \quad t = \frac{1}{2b}e^{2\tau}, \quad y(t) = be^{(k-2)\tau}w(\tau), \quad f(x) = e^{-kz}g(z).$$

В результате получим интегральное уравнение с разностным ядром вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(\tau)\,d\tau}{\operatorname{ch}^k(z-\tau)} = g(z).$$

40. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} t^{z-1}y(t)\,dt = f(z).$

Левая часть уравнения является преобразованием Меллина функции $y(t)$ (переменная z рассматривается в комплексной плоскости).

Решение:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-z}f(z)\,dz, \qquad i^2 = -1.$$

Для конкретных функций $f(z)$ для вычисления интеграла можно использовать таблицы интегральных преобразований Меллина и Лапласа.

⊙ *Литература*: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (т. 2, 1974), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 74).

3.1-7. Уравнения, содержащие неизвестную функцию сложного аргумента

41. $\displaystyle\int_0^1 y(xt)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = xf'_x(x) + f(x).$$

Считается, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию $\bigl[xf(x)\bigr]_{x=0} = 0$.

42. $\displaystyle\int_0^1 t^\lambda y(xt)\,dt = f(x).$

Замена $\xi = xt$ приводит к уравнению $\displaystyle\int_0^x \xi^\lambda y(\xi)\,d\xi = x^{\lambda+1} f(x)$. Дифференцируя по x, находим решение

$$y(x) = xf'_x(x) + (\lambda+1)f(x).$$

Считается, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию $\bigl[x^{\lambda+1}f(x)\bigr]_{x=0} = 0$.

43. $\displaystyle\int_0^1 (Ax^k + Bt^m)y(xt)\,dt = f(x).$

Замена $\xi = xt$ приводит к уравнению вида 1.1.50:

$$\int_0^x \bigl(Ax^{k+m} + B\xi^m\bigr)y(\xi)\,d\xi = x^{m+1} f(x).$$

44. $\displaystyle\int_0^1 \frac{y(xt)\,dt}{\sqrt{1-t}} = f(x).$

Замена $\xi = xt$ приводит к уравнению Абеля 1.1.36:

$$\int_0^x \frac{y(\xi)\,d\xi}{\sqrt{x-\xi}} = \sqrt{x}\,f(x).$$

45. $\displaystyle\int_0^1 \frac{y(xt)\,dt}{(1-t)^\lambda} = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Замена $\xi = xt$ приводит к обобщенному уравнению Абеля 1.1.46:

$$\int_0^x \frac{y(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^\lambda} = x^{1-\lambda} f(x).$$

46. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\mu y(xt)}{(1-t)^\lambda}\,dt = f(x), \qquad 0 < \lambda < 1.$

Преобразование $\xi = xt$, $w(\xi) = \xi^\mu y(\xi)$ приводит к обобщенному уравнению Абеля 1.1.46:

$$\int_0^x \frac{w(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^\lambda} = x^{1+\mu-\lambda} f(x).$$

47. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y(x+t) - y(x-t)}{t}\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\,dt.$$

⊙ *Литература*: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 92).

3.1-8. Сингулярные уравнения

В этом разделе сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

48. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y(t)\,dt}{t-x}=f(x).$

Решение:

$$y(x)=-\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-x}.$$

Интегральное уравнение и выражение для его решения представляют собой преобразование Гильберта (в несимметричной форме).

⊙ *Литература*: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 92).

49. $\displaystyle\int_a^b\frac{y(t)\,dt}{t-x}=f(x).$

Это уравнение встречается в гидродинамике в задаче об обтекании тонкого профиля потоком идеальной жидкости ($a\leqslant x\leqslant b$). Считается, что $|a|+|b|<\infty$.

1°. Решение, ограниченное на обоих концах:

$$y(x)=-\frac{1}{\pi^2}\sqrt{(x-a)(b-x)}\int_a^b\frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}\,\frac{dt}{t-x}.$$

При этом должно выполняться условие

$$\int_a^b\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}=0.$$

2°. Решение, ограниченное при $x=a$ и неограниченное при $x=b$:

$$y(x)=-\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\int_a^b\sqrt{\frac{b-t}{t-a}}\,\frac{f(t)}{t-x}\,dt.$$

3°. Решение, неограниченное на обоих концах:

$$y(x)=-\frac{1}{\pi^2\sqrt{(x-a)(b-x)}}\left[\int_a^b\frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x}f(t)\,dt+C\right],$$

где C — произвольная постоянная, причем $\displaystyle\int_a^b y(t)\,dt=C/\pi$.

⊙ *Литература*: Ф. Д. Гахов (1977, стр. 446).

3.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции

3.2-1. Ядра уравнений содержат экспоненциальные функции

1. $\displaystyle\int_a^b e^{\lambda|x-t|}y(t)\,dt=f(x),\qquad -\infty<a<b<\infty.$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_a^x e^{\lambda(x-t)}y(t)\,dt+\int_x^b e^{\lambda(t-x)}y(t)\,dt=f(x).\tag{1}$$

Продифференцируем (1) дважды по x. Тогда

$$2\lambda y(x)+\lambda^2\int_a^x e^{\lambda(x-t)}y(t)\,dt+\lambda^2\int_x^b e^{\lambda(t-x)}y(t)\,dt=f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2) интегральные слагаемые, находим решение

$$y(x)=\frac{1}{2\lambda}\bigl[f''_{xx}(x)-\lambda^2 f(x)\bigr]. \tag{3}$$

2°. Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) $x=a$ и $x=b$, имеем два следствия:

$$\int_a^b e^{\lambda t}y(t)\,dt=e^{\lambda a}f(a),\qquad \int_a^b e^{-\lambda t}y(t)\,dt=e^{-\lambda b}f(b). \tag{4}$$

Подставим в равенства (4) решение (3). Интегрируя по частям, получим

$$e^{\lambda b}f'_x(b)-e^{\lambda a}f'_x(a)=\lambda e^{\lambda a}f(a)+\lambda e^{\lambda b}f(b),$$
$$e^{-\lambda b}f'_x(b)-e^{-\lambda a}f'_x(a)=\lambda e^{-\lambda a}f(a)+\lambda e^{-\lambda b}f(b).$$

Отсюда находим искомые условия для функции $f(x)$:

$$f'_x(a)+\lambda f(a)=0,\qquad f'_x(b)-\lambda f(b)=0. \tag{5}$$

Общий вид правой части интегрального уравнения, удовлетворяющей условиям (5), дается формулой

$$f(x)=F(x)+Ax+B,$$
$$A=\frac{1}{b\lambda-a\lambda-2}\bigl[F'_x(a)+F'_x(b)+\lambda F(a)-\lambda F(b)\bigr],\quad B=-\frac{1}{\lambda}\bigl[F'_x(a)+\lambda F(a)+Aa\lambda+A\bigr],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция.

2. $\displaystyle\int_a^b\bigl(Ae^{\lambda|x-t|}+Be^{\mu|x-t|}\bigr)y(t)\,dt=f(x),\qquad -\infty<a<b<\infty.$

Раскроем модуль в подынтегральном выражении и продифференцируем уравнение дважды по x. В результате получим

$$2(A\lambda+B\mu)y(x)+\int_a^b\bigl(A\lambda^2e^{\lambda|x-t|}+B\mu^2e^{\mu|x-t|}\bigr)y(t)\,dt=f''_{xx}(x). \tag{1}$$

Исключая отсюда с помощью исходного уравнение интегральное слагаемое с членом $e^{\mu|x-t|}$, имеем

$$2(A\lambda+B\mu)y(x)+A(\lambda^2-\mu^2)\int_a^b e^{\lambda|x-t|}y(t)\,dt=f''_{xx}(x)-\mu^2f(x). \tag{2}$$

При $A\lambda+B\mu=0$ это уравнение вида 3.2.1, а при $A\lambda+B\mu\neq0$ это уравнение вида 4.2.15.

Правая часть $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям, которые получаются подстановкой $x=a$ и $x=b$ в исходное интегральное уравнение (аналогичная процедура использовалась в 3.2.1).

3. $\displaystyle\int_a^b\bigl|e^{\lambda x}-e^{\lambda t}\bigr|\,y(t)\,dt=f(x),\qquad \lambda>0.$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x)=e^{\lambda x}$.

Решение:

$$y(x)=\frac{1}{2\lambda}\frac{d}{dx}\bigl[e^{-\lambda x}f'_x(x)\bigr].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° в уравнении 3.8.3).

4. $\displaystyle\int_0^a |e^{\beta x} - e^{\mu t}|\, y(t)\, dt = f(x), \qquad \beta > 0, \quad \mu > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = e^{\beta x}$, $\lambda = \mu/\beta$.

5. $\displaystyle\int_a^b \Bigl[\sum_{k=1}^{n} A_k \exp\bigl(\lambda_k |x - t|\bigr)\Bigr] y(t)\, dt = f(x), \qquad -\infty < a < b < \infty.$

1°. Раскроем модуль в одном из слагаемых в подынтегральном выражении:

$$I_k(x) = \int_a^b \exp\bigl(\lambda_k |x-t|\bigr) y(t)\, dt = \int_a^x \exp[\lambda_k(x-t)] y(t)\, dt + \int_x^b \exp[\lambda_k(t-x)] y(t)\, dt. \tag{1}$$

Продифференцируем (1) дважды по x. В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$\begin{aligned} I_k' &= \lambda_k \int_a^x \exp[\lambda_k(x-t)] y(t)\, dt - \lambda_k \int_x^b \exp[\lambda_k(t-x)] y(t)\, dt, \\ I_k'' &= 2\lambda_k y(x) + \lambda_k^2 \int_a^x \exp[\lambda_k(x-t)] y(t)\, dt + \lambda_k^2 \int_x^b \exp[\lambda_k(t-x)] y(t)\, dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I_k'' и I_k:

$$I_k'' = 2\lambda_k y(x) + \lambda_k^2 I_k, \qquad I_k = I_k(x). \tag{3}$$

2°. Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} A_k I_k = f(x). \tag{4}$$

Дифференцируя (4) дважды по x, с учетом равенств (3) имеем

$$\sigma_1 y(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k \lambda_k^2 I_k = f_{xx}''(x), \qquad \sigma_1 = 2\sum_{k=1}^{n} A_k \lambda_k. \tag{5}$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$\sigma_1 y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(\lambda_k^2 - \lambda_n^2) I_k = f_{xx}''(x) - \lambda_n^2 f(x). \tag{6}$$

Если продифференцировать это равенство дважды по x, а затем исключить интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum\limits_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, $\ldots$, I_1, придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2(n-1)$.

3°. Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Эти соотношения находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования. (Эти соотношения можно найти, подставляя значения $x = a$ и $x = b$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью двукратного дифференцирования.)

6. $\displaystyle\int_a^b \frac{y(t)\,dt}{|e^{\lambda x}-e^{\lambda t}|^k}=f(x), \qquad 0<k<1.$

Преобразование $z=e^{\lambda x}$, $\tau=e^{\lambda t}$, $w(\tau)=e^{-\lambda t}y(t)$ приводит к уравнению вида 3.1.30:

$$\int_A^B \frac{w(\tau)}{|z-\tau|^k}\,d\tau=F(z),$$

где $A=e^{\lambda a}$, $B=e^{\lambda b}$, $F(z)=\lambda f\bigl(\frac{1}{\lambda}\ln z\bigr)$.

7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y(t)\,dt}{(e^{\lambda x}+e^{\lambda t})^k}=f(x), \qquad \lambda>0, \quad k>0.$

Это уравнение можно записать в виде уравнения с разностным ядром 3.8.16:

$$\int_0^\infty \frac{w(t)\,dt}{\operatorname{ch}^k\bigl[\frac{1}{2}\lambda(x-t)\bigr]}=g(x),$$

где $w(t)=2^{-k}\exp\bigl(-\frac{1}{2}\lambda kt\bigr)y(t)$, $g(x)=\exp\bigl(\frac{1}{2}\lambda kx\bigr)f(x)$.

8. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-zt}y(t)\,dt=f(z).$

Левая часть уравнения является преобразованием Лапласа функции $y(t)$ (переменная z рассматривается в комплексной плоскости).

1°. Решение:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt}f(z)\,dz, \qquad i^2=-1.$$

При вычислении интеграла для функций $f(z)$ конкретного вида можно воспользоваться таблицами обратного преобразования Лапласа.

2°. Для действительных $x=z$ при некоторых допущениях решение исходного уравнения можно представить в следующем виде (вещественное обращение преобразования Лапласа):

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\Bigl(\frac{n}{x}\Bigr)^{n+1}f_x^{(n)}\Bigl(\frac{n}{x}\Bigr).$$

Для получения приближенного решения интегрального уравнения в этой формуле вместо предела ограничиваются заданием конкретного значения n.

⊙ *Литература*: И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер (1958), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (т. 1, 1973), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974).

3.2-2. Ядра содержат степенные и экспоненциальные функции

9. $\displaystyle\int_0^a \bigl|ke^{\lambda x}-k-t\bigr|\,y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x)=ke^{\lambda x}-k$.

10. $\displaystyle\int_0^a \bigl|x-ke^{\lambda t}-k\bigr|\,y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(t)=ke^{\lambda t}+k$.

11. $\displaystyle\int_a^b \left|\exp(\lambda x^2) - \exp(\lambda t^2)\right| y(t)\,dt = f(x), \qquad \lambda > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \exp(\lambda x^2)$.

Решение:
$$y(x) = \frac{1}{4\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\exp(-\lambda x^2) f'_x(x)\right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

12. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{4x}\right) y(t)\,dt = f(x).$

Применяя к обеим частям уравнения преобразование Лапласа, для изображения получим
$$\frac{\tilde{y}(\sqrt{p}\,)}{\sqrt{p}} = \tilde{f}(p), \qquad \tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt.$$
Заменяя p на p^2 и разрешая относительно $\tilde{y}$, имеем $\tilde{y}(p) = p\tilde{f}(p^2)$. Обратное преобразование Лапласа дает решение исходного интегрального уравнения
$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{p\tilde{f}(p^2)\}, \qquad \mathfrak{L}^{-1}\{g(p)\} \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} g(p)\,dp.$$

13. $\displaystyle\int_0^\infty \exp[-g(x)t^2]y(t)\,dt = f(x).$

Пусть выполняются условия $g(0) = \infty$, $g(\infty) = 0$, $g'_x < 0$.

Замена $z = \dfrac{1}{4g(x)}$ приводит к уравнению 3.2.12:
$$\frac{1}{\sqrt{\pi z}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{4z}\right) y(t)\,dt = F(z),$$
где зависимость $F(z)$ определяется из выражений $F = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} f(x)\sqrt{g(x)}$, $z = \dfrac{1}{4g(x)}$ путем исключения переменной x.

3.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции

3.3-1. Ядра уравнений содержат гиперболический косинус

1. $\displaystyle\int_a^b \left|\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)\right| y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$.

Решение:
$$y(x) = \frac{1}{2\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{sh}(\lambda x)}\right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

2. $\displaystyle\int_0^a \left|\operatorname{ch}(\beta x) - \operatorname{ch}(\mu t)\right| y(t)\,dt = f(x), \qquad \beta > 0, \quad \mu > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$, $\lambda = \mu/\beta$.

3. $\displaystyle\int_a^b |\operatorname{ch}^k x - \operatorname{ch}^k t|\, y(t)\, dt = f(x), \qquad 0 < k < 1.$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{ch}^k x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2k}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{k-1} x}\right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

4. $\displaystyle\int_a^b \frac{y(t)}{|\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)|^k}\, dt = f(x), \qquad 0 < k < 1.$

Частный случай уравнения 3.8.7 при $g(x) = \operatorname{ch}(\lambda x) + \beta$, где β — любое.

3.3-2. Ядра уравнений содержат гиперболический синус

5. $\displaystyle\int_a^b \operatorname{sh}(\lambda|x-t|)\, y(t)\, dt = f(x), \qquad -\infty < a < b < \infty.$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]y(t)\, dt + \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda(t-x)]y(t)\, dt = f(x). \tag{1}$$

Продифференцируем (1) дважды по x. Тогда

$$2\lambda y(x) + \lambda^2 \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]y(t)\, dt + \lambda^2 \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda(t-x)]y(t)\, dt = f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2) интегральные слагаемые, находим решение

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda}\big[f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x)\big]. \tag{3}$$

2°. Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\int_a^b \operatorname{sh}[\lambda(t-a)]y(t)\, dt = f(a), \qquad \int_a^b \operatorname{sh}[\lambda(b-t)]y(t)\, dt = f(b). \tag{4}$$

Подставим в равенства (4) решение (3). Интегрируя по частям, получим искомые условия для функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sh}[\lambda(b-a)]f'_x(b) - \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b-a)]f(b) = \lambda f(a),\\ &\operatorname{sh}[\lambda(b-a)]f'_x(a) + \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b-a)]f(a) = -\lambda f(b). \end{aligned} \tag{5}$$

Общий вид правой части интегрального уравнения дается формулой

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \tag{6}$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция, а коэффициенты A и B выражаются через величины $F(a)$, $F(b)$, $F'_x(a)$, $F'_x(b)$ и определяются в результате подстановки формулы (6) в условия (5).

6. $\displaystyle\int_a^b \Big\{A \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) + B \operatorname{sh}(\mu|x-t|)\Big\} y(t)\, dt = f(x), \qquad -\infty < a < b < \infty.$

Раскроем модуль в подынтегральном выражении и продифференцируем уравнение дважды по x. В результате получим

$$2(A\lambda + B\mu)y(x) + \int_a^b \big\{A\lambda^2 \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) + B\mu^2 \operatorname{sh}(\mu|x-t|)\big\} y(t)\, dt = f''_{xx}(x). \tag{1}$$

Исключая отсюда с помощью исходного уравнение интегральное слагаемое с членом $\operatorname{sh}(\mu|x-t|)$, имеем

$$2(A\lambda+B\mu)y(x)+A(\lambda^2-\mu^2)\int_a^b \operatorname{sh}(\lambda|x-t|)y(t)\,dt=f''_{xx}(x)-\mu^2 f(x). \qquad (2)$$

При $A\lambda+B\mu=0$ это уравнение вида 3.3.5, а при $A\lambda+B\mu\neq 0$ это уравнение вида 4.3.26.

Правая часть $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям, которые получаются подстановкой $x=a$ и $x=b$ в исходное интегральное уравнение (аналогичная процедура использовалась в 3.3.5).

7. $\displaystyle\int_a^b \bigl|\operatorname{sh}(\lambda x)-\operatorname{sh}(\lambda t)\bigr|\,y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x)=\operatorname{sh}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x)=\frac{1}{2\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{ch}(\lambda x)}\right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

8. $\displaystyle\int_0^a \bigl|\operatorname{sh}(\beta x)-\operatorname{sh}(\mu t)\bigr|\,y(t)\,dt=f(x), \qquad \beta>0, \quad \mu>0.$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x)=\operatorname{sh}(\beta x)$, $\lambda=\mu/\beta$.

9. $\displaystyle\int_a^b \operatorname{sh}^3(\lambda|x-t|)\,y(t)\,dt=f(x).$

Используя формулу $\operatorname{sh}^3\beta=\frac14\operatorname{sh}3\beta-\frac34\operatorname{sh}\beta$, приходим к уравнению вида 3.3.6:

$$\int_a^b \left[\tfrac14 A\operatorname{sh}(3\lambda|x-t|)-\tfrac34 A\operatorname{sh}(\lambda|x-t|)\right]y(t)\,dt=f(x).$$

10. $\displaystyle\int_a^b \left[\sum_{k=1}^n A_k\operatorname{sh}(\lambda_k|x-t|)\right]y(t)\,dt=f(x), \qquad -\infty<a<b<\infty.$

1°. Раскроем модуль в одном из слагаемых в подынтегральном выражении:

$$I_k(x)=\int_a^b \operatorname{sh}(\lambda_k|x-t|)\,y(t)\,dt=\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt+\int_x^b \operatorname{sh}[\lambda_k(t-x)]y(t)\,dt. \quad (1)$$

Продифференцируем (1) дважды по x. В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$\begin{aligned}
I'_k&=\lambda_k\int_a^x \operatorname{ch}[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt-\lambda_k\int_x^b \operatorname{ch}[\lambda_k(t-x)]y(t)\,dt,\\
I''_k&=2\lambda_k y(x)+\lambda_k^2\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt+\lambda_k^2\int_x^b \operatorname{sh}[\lambda_k(t-x)]y(t)\,dt.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I''_k и I_k:

$$I''_k=2\lambda_k y(x)+\lambda_k^2 I_k, \qquad I_k=I_k(x). \qquad (3)$$

2°. Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^n A_k I_k=f(x). \qquad (4)$$

Дифференцируя (4) дважды по x, с учетом равенств (3) имеем

$$\sigma_1 y(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k \lambda_k^2 I_k = f''_{xx}(x), \qquad \sigma_1 = 2\sum_{k=1}^{n} A_k \lambda_k. \tag{5}$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$\sigma_1 y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(\lambda_k^2 - \lambda_n^2) I_k = f''_{xx}(x) - \lambda_n^2 f(x). \tag{6}$$

Если продифференцировать это равенство дважды по x, а затем исключить интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum\limits_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, …, придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2(n-1)$.

3°. Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Эти соотношения находятся в результате подстановки значения $x=a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования. (Эти соотношения можно найти, подставляя значения $x=a$ и $x=b$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью двукратного дифференцирования.)

11. $\displaystyle\int_0^b \left|\operatorname{sh}^k x - \operatorname{sh}^k t\right| y(t)\,dt = f(x), \qquad 0<k<1.$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{sh}^k x$.
Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2k}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh}^{k-1} x}\right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Из п. 3° уравнения 3.8.3 следует, что допустимый общий вид правой части дается формулой

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \qquad A = -F'_x(b), \qquad B = \tfrac{1}{2}\left[bF'_x(b) - F(0) - F(b)\right],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

12. $\displaystyle\int_a^b \frac{y(t)}{|\operatorname{sh}(\lambda x) - \operatorname{sh}(\lambda t)|^k}\,dt = f(x), \qquad 0<k<1.$

Частный случай уравнения 3.8.7 при $g(x) = \operatorname{sh}(\lambda x) + \beta$, где β — любое.

13. $\displaystyle\int_0^a \left|k\operatorname{sh}(\lambda x) - t\right| y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x) = k\operatorname{sh}(\lambda x)$.

14. $\displaystyle\int_0^a \left|x - k\operatorname{sh}(\lambda t)\right| y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(x) = k\operatorname{sh}(\lambda t)$.

3.3-3. Ядра уравнений содержат гиперболический тангенс

15. $\displaystyle\int_a^b \big|\operatorname{th}(\lambda x) - \operatorname{th}(\lambda t)\big|\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{th}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda}\frac{d}{dx}\big[\operatorname{ch}^2(\lambda x) f'_x(x)\big].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

16. $\displaystyle\int_0^a \big|\operatorname{th}(\beta x) - \operatorname{th}(\mu t)\big|\, y(t)\, dt = f(x), \qquad \beta > 0, \quad \mu > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = \operatorname{th}(\beta x)$, $\lambda = \mu/\beta$.

17. $\displaystyle\int_0^b |\operatorname{th}^k x - \operatorname{th}^k t|\, y(t)\, dt = f(x), \qquad 0 < k < 1.$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{th}^k x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2k}\frac{d}{dx}\big[\operatorname{ch}^2 x \operatorname{cth}^{k-1} x\, f'_x(x)\big].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Из п. 3° уравнения 3.8.3 следует, что допустимый общий вид правой части дается формулой

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \qquad A = -F'_x(b), \quad B = \tfrac{1}{2}\big[bF'_x(b) - F(0) - F(b)\big],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

18. $\displaystyle\int_a^b \frac{y(t)}{|\operatorname{th}(\lambda x) - \operatorname{th}(\lambda t)|^k}\, dt = f(x), \qquad 0 < k < 1.$

Частный случай уравнения 3.8.7 при $g(x) = \operatorname{th}(\lambda x) + \beta$, где β — любое.

19. $\displaystyle\int_0^a \big|k \operatorname{th}(\lambda x) - t\big|\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x) = k \operatorname{th}(\lambda x)$.

20. $\displaystyle\int_0^a \big|x - k \operatorname{th}(\lambda t)\big|\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(x) = k \operatorname{th}(\lambda t)$.

3.3-4. Ядра уравнений содержат гиперболический котангенс

21. $\displaystyle\int_a^b \big|\operatorname{cth}(\lambda x) - \operatorname{cth}(\lambda t)\big|\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{cth}(\lambda x)$.

22. $\displaystyle\int_0^b \big|\operatorname{cth}^k x - \operatorname{cth}^k t\big|\, y(t)\, dt = f(x), \qquad 0 < k < 1.$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{cth}^k x$.

3.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции

3.4-1. Ядра содержат только логарифмические функции

1. $\displaystyle\int_a^b \bigl|\ln(x/t)\bigr|\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \ln x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\bigl[x f'_x(x)\bigr].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

2. $\displaystyle\int_a^b \ln|x-t|\, y(t)\, dt = f(x).$

Уравнение Карлемана.

1°. Решение при $b - a \neq 4$:

$$y(x) = \frac{1}{\pi^2\sqrt{(x-a)(b-x)}}\left[\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}\, f'_t(t)\, dt}{t-x} + \frac{1}{\pi\ln\bigl[\frac{1}{4}(b-a)\bigr]}\int_a^b \frac{f(t)\, dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}\right].$$

2°. При $b - a = 4$ для разрешимости уравнения должно выполняться условие

$$\int_a^b f(t)(t-a)^{-1/2}(b-t)^{-1/2}\, dt = 0.$$

В этом случае решение имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{\pi^2\sqrt{(x-a)(b-x)}}\left[\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}\, f'_t(t)\, dt}{t-x} + C\right],$$

где C — произвольная постоянная.

◉ *Литература*: Ф. Д. Гахов (1977, стр. 591, 592).

3. $\displaystyle\int_a^b \bigl(\ln|x-t| + \beta\bigr) y(t)\, dt = f(x).$

Положим

$$x = e^{-\beta} z, \quad t = e^{-\beta}\tau, \quad y(t) = Y(\tau), \quad f(x) = e^{-\beta} g(z).$$

В результате получим уравнение вида 3.4.2:

$$\int_A^B \ln|z-\tau|\, Y(\tau)\, d\tau = g(z), \qquad A = ae^{\beta},\ B = be^{\beta}.$$

4. $\displaystyle\int_{-a}^a \Bigl(\ln\frac{A}{|x-t|}\Bigr) y(t)\, dt = f(x), \qquad -a \leqslant x \leqslant a.$

Частный случай уравнения 3.4.3 при $b = -a$. Решение при $0 < a < 2A$:

$$y(x) = \frac{1}{2M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int_{-a}^a w(t,a) f(t)\, dt\right] w(x,a) - \frac{1}{2}\int_{|x|}^a w(x,\xi)\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{M'(\xi)}\frac{d}{d\xi}\int_{-\xi}^{\xi} w(t,\xi) f(t)\, dt\right] d\xi - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_{|x|}^a \frac{w(x,\xi)}{M'(\xi)}\left[\int_{-\xi}^{\xi} w(t,\xi)\, df(t)\right] d\xi.$$

Здесь штрих соответствует производной и использованы следующие обозначения:

$$M(\xi) = \left(\ln \frac{2A}{\xi}\right)^{-1}, \qquad w(x,\xi) = \frac{M(\xi)}{\pi\sqrt{\xi^2 - x^2}}.$$

⊙ *Литература*: И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн (1967, стр. 245).

5. $\displaystyle\int_0^a \ln\left|\frac{x+t}{x-t}\right| y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = -\frac{2}{\pi^2}\frac{d}{dx}\int_x^a \frac{F(t)\,dt}{\sqrt{t^2 - x^2}}, \qquad F(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{sf(s)\,ds}{\sqrt{t^2 - s^2}}.$$

⊙ *Литература*: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 34).

6. $\displaystyle\int_a^b \left|\ln\frac{1+\lambda x}{1+\lambda t}\right| y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \ln(1+\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda}\frac{d}{dx}\big[(1+\lambda x)f'_x(x)\big].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

7. $\displaystyle\int_a^b \left|\ln^\beta x - \ln^\beta t\right| y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < \beta < 1.$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \ln^\beta x$.

8. $\displaystyle\int_a^b \frac{y(t)}{|\ln(x/t)|^\beta}\,dt = f(x), \qquad 0 < \beta < 1.$

Частный случай уравнения 3.8.7 при $g(x) = \ln x + A$, где A — любое.

3.4-2. Ядра содержат степенные и логарифмические функции

9. $\displaystyle\int_0^a \left|k\ln(1+\lambda x) - t\right| y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x) = k\ln(1+\lambda x)$.

10. $\displaystyle\int_0^a \left|x - k\ln(1+\lambda t)\right| y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(x) = k\ln(1+\lambda t)$.

11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{t}\ln\left|\frac{x+t}{x-t}\right| y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{x}{\pi^2}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}\ln\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| dt.$$

⊙ *Литература*: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 34).

12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x - \ln t}{x - t}\, y(t)\, dt = f(x).$

Правая часть этого уравнения представляет собой итерированное преобразование Стилтьеса.

При некоторых допущениях решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$y(x) = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{n}\right)^{4n} D^n x^{2n} D^{2n} x^{2n} D^n f(x), \quad D = \frac{d}{dx}.$$

Для получения приближенного решения в этой формуле вместо предела ограничиваются заданием конкретного значения n.

⦿ *Литература*: И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер (1958).

13. $\displaystyle\int_a^b \ln|x^\beta - t^\beta|\, y(t)\, dt = f(x), \qquad \beta > 0.$

Преобразование

$$z = x^\beta, \quad \tau = t^\beta, \quad w(\tau) = t^{1-\beta} y(t)$$

приводит к уравнению Карлемана 3.4.2:

$$\int_A^B \ln|z - \tau| w(\tau)\, d\tau = F(z), \qquad A = a^\beta, \quad B = b^\beta,$$

где $F(z) = \beta f\bigl(z^{1/\beta}\bigr)$.

14. $\displaystyle\int_0^1 \ln|x^\beta - t^\mu|\, y(t)\, dt = f(x), \qquad \beta > 0,\ \mu > 0.$

Преобразование

$$z = x^\beta, \quad \tau = t^\mu, \quad w(\tau) = t^{1-\mu} y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.4.2:

$$\int_0^1 \ln|z - \tau| w(\tau)\, d\tau = F(z), \qquad F(z) = \mu f\bigl(z^{1/\beta}\bigr).$$

3.4-3. Уравнение содержит неизвестную функцию сложного аргумента

15. $\displaystyle\int_0^1 (A\ln t + B) y(xt)\, dt = f(x).$

Замена $\xi = xt$ приводит к уравнению вида 1.9.3 при $g(x) = -A\ln x$:

$$\int_0^x \bigl(A\ln\xi - A\ln x + B\bigr) y(\xi)\, d\xi = x f(x).$$

3.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции

3.5-1. Ядра уравнений содержат косинус

1. $\displaystyle\int_0^\infty \cos(xt) y(t)\, dt = f(x).$

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(xt) f(t)\, dt.$

Исходное уравнение и выражение для его решения представляют собой прямое и обратное косинус-преобразования Фурье (в несимметричной форме).

⦿ *Литература*: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (т. 1, 1973), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 16).

2. $\displaystyle\int_a^b \bigl|\cos(\lambda x) - \cos(\lambda t)\bigr|\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \cos(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{2\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\sin(\lambda x)}\right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

3. $\displaystyle\int_0^a \bigl|\cos(\beta x) - \cos(\mu t)\bigr|\, y(t)\, dt = f(x), \qquad \beta > 0, \quad \mu > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = \cos(\beta x)$, $\lambda = \mu/\beta$.

4. $\displaystyle\int_a^b \bigl|\cos^k x - \cos^k t\bigr|\, y(t)\, dt = f(x), \qquad 0 < k < 1.$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \cos^k x$.

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{2k}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\sin x\,\cos^{k-1} x}\right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

5. $\displaystyle\int_a^b \frac{y(t)}{|\cos(\lambda x) - \cos(\lambda t)|^k}\, dt = f(x), \qquad 0 < k < 1.$

Частный случай уравнения 3.8.7 при $g(x) = \cos(\lambda x) + \beta$, где β — любое.

3.5-2. Ядра уравнений содержат синус

6. $\displaystyle\int_0^\infty \sin(xt) y(t)\, dt = f(x).$

Решение: $\displaystyle y(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(xt) f(t)\, dt.$

Исходное уравнение и выражение для его решения представляют собой прямое и обратное синус-преобразования Фурье (в несимметричной форме).

⦿ *Литература*: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (т. 1, 1973), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 16).

7. $\displaystyle\int_a^b \sin\bigl(\lambda|x - t|\bigr) y(t)\, dt = f(x), \qquad -\infty < a < b < \infty.$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_a^x \sin[\lambda(x - t)] y(t)\, dt + \int_x^b \sin[\lambda(t - x)] y(t)\, dt = f(x). \tag{1}$$

Продифференцируем (1) дважды по x. Тогда

$$2\lambda y(x) - \lambda^2\int_a^x \sin[\lambda(x - t)] y(t)\, dt - \lambda^2\int_x^b \sin[\lambda(t - x)] y(t)\, dt = f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2) интегральные слагаемые, находим решение

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda}\bigl[f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x)\bigr]. \tag{3}$$

2°. Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) $x=a$ и $x=b$, имеем два следствия:

$$\int_a^b \sin[\lambda(t-a)]y(t)\,dt = f(a), \qquad \int_a^b \sin[\lambda(b-t)]y(t)\,dt = f(b). \tag{4}$$

Подставим в равенства (4) решение (3). Интегрируя по частям, получим искомые условия для функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} &\sin[\lambda(b-a)]f'_x(b) - \lambda\cos[\lambda(b-a)]f(b) = \lambda f(a),\\ &\sin[\lambda(b-a)]f'_x(a) + \lambda\cos[\lambda(b-a)]f(a) = -\lambda f(b). \end{aligned} \tag{5}$$

Общий вид правой части интегрального уравнения дается формулой

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \tag{6}$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция, а коэффициенты A и B выражаются через величины $F(a)$, $F(b)$, $F'_x(a)$, $F'_x(b)$ и определяются в результате подстановки формулы (6) в условия (5).

8. $\displaystyle\int_a^b \bigl\{A\sin\bigl(\lambda|x-t|\bigr) + B\sin\bigl(\mu|x-t|\bigr)\bigr\}y(t)\,dt = f(x), \qquad -\infty < a < b < \infty.$

Раскроем модуль в подынтегральном выражении и продифференцируем уравнение дважды по x. В результате получим

$$2(A\lambda + B\mu)y(x) - \int_a^b \bigl\{A\lambda^2\sin\bigl(\lambda|x-t|\bigr) + B\mu^2\sin\bigl(\mu|x-t|\bigr)\bigr\}y(t)\,dt = f''_{xx}(x). \tag{1}$$

Исключая отсюда с помощью исходного уравнение интегральное слагаемое с членом $\sin\bigl(\mu|x-t|\bigr)$, имеем

$$2(A\lambda + B\mu)y(x) + A(\mu^2-\lambda^2)\int_a^b \sin\bigl(\lambda|x-t|\bigr)y(t)\,dt = f''_{xx}(x) + \mu^2 f(x). \tag{2}$$

При $A\lambda + B\mu = 0$ это уравнение вида 3.5.7, а при $A\lambda + B\mu \neq 0$ это уравнение вида 4.5.29.

Правая часть $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям, которые получаются подстановкой $x=a$ и $x=b$ в исходное интегральное уравнение (аналогичная процедура использовалась в 3.5.7).

9. $\displaystyle\int_a^b \bigl|\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)\bigr|\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \sin(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{f'_x(x)}{\cos(\lambda x)}\right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

10. $\displaystyle\int_0^a \bigl|\sin(\beta x) - \sin(\mu t)\bigr|\,y(t)\,dt = f(x), \qquad \beta > 0, \quad \mu > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = \sin(\beta x)$, $\lambda = \mu/\beta$.

11. $\displaystyle\int_a^b \sin^3\bigl(\lambda|x-t|\bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Используя формулу $\sin^3\beta = -\frac{1}{4}\sin 3\beta + \frac{3}{4}\sin\beta$, приходим к уравнению вида 3.5.8:

$$\int_a^b \bigl[-\tfrac{1}{4}A\sin\bigl(3\lambda|x-t|\bigr) + \tfrac{3}{4}A\sin\bigl(\lambda|x-t|\bigr)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$$

12. $\displaystyle \int_a^b \Bigg[\sum_{k=1}^n A_k \sin\big(\lambda_k|x-t|\big)\Bigg] y(t)\,dt = f(x), \qquad -\infty < a < b < \infty.$

1°. Раскроем модуль в одном из слагаемых в подынтегральном выражении:

$$I_k(x)=\int_a^b \sin\big(\lambda_k|x-t|\big)y(t)\,dt=\int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt+\int_x^b \sin[\lambda_k(t-x)]y(t)\,dt. \quad (1)$$

Продифференцируем (1) дважды по x. В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$\begin{aligned} I_k' &= \lambda_k \int_a^x \cos[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt - \lambda_k \int_x^b \cos[\lambda_k(t-x)]y(t)\,dt, \\ I_k'' &= 2\lambda_k y(x) - \lambda_k^2 \int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt - \lambda_k^2 \int_x^b \sin[\lambda_k(t-x)]y(t)\,dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I_k'' и I_k:

$$I_k'' = 2\lambda_k y(x) - \lambda_k^2 I_k, \qquad I_k = I_k(x). \quad (3)$$

2°. Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^n A_k I_k = f(x). \quad (4)$$

Дифференцируя (4) дважды по x, с учетом равенств (3) имеем

$$\sigma_1 y(x) - \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k^2 I_k = f_{xx}''(x), \qquad \sigma_1 = 2\sum_{k=1}^n A_k\lambda_k. \quad (5)$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$\sigma_1 y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) I_k = f_{xx}''(x) + \lambda_n^2 f(x). \quad (6)$$

Если продифференцировать это равенство дважды по x, а затем исключить интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum\limits_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, ..., придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2(n-1)$.

3°. Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Эти соотношения находятся в результате подстановки значения $x=a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования. (Эти соотношения можно найти, подставляя значения $x=a$ и $x=b$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью двукратного дифференцирования.)

13. $\displaystyle \int_0^b \big|\sin^k x - \sin^k t\big|\, y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < k < 1.$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \sin^k x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2k}\,\frac{d}{dx}\left[\frac{f_x'(x)}{\cos x\,\sin^{k-1} x}\right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Из п. 3° уравнения 3.8.3 следует, что допустимый общий вид правой части дается формулой

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \qquad A = -F'_x(b), \quad B = \tfrac{1}{2}\big[bF'_x(b) - F(0) - F(b)\big],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

14. $\displaystyle \int_a^b \frac{y(t)}{|\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)|^k}\,dt = f(x), \qquad 0 < k < 1.$

Частный случай уравнения 3.8.7 при $g(x) = \sin(\lambda x) + \beta$, где β — любое.

15. $\displaystyle \int_0^a \big|k\sin(\lambda x) - t\big|\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x) = k\sin(\lambda x)$.

16. $\displaystyle \int_0^a \big|x - k\sin(\lambda t)\big|\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(t) = k\sin(\lambda t)$.

3.5-3. Ядра уравнений содержат тангенс

17. $\displaystyle \int_a^b \big|\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)\big|\,y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{tg}(\lambda x)$.
Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda}\frac{d}{dx}\left[\cos^2(\lambda x) f'_x(x)\right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

18. $\displaystyle \int_0^a \big|\operatorname{tg}(\beta x) - \operatorname{tg}(\mu t)\big|\,y(t)\,dt = f(x), \qquad \beta > 0, \quad \mu > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = \operatorname{tg}(\beta x)$, $\lambda = \mu/\beta$.

19. $\displaystyle \int_0^b \big|\operatorname{tg}^k x - \operatorname{tg}^k t\big|\,y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < k < 1.$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{tg}^k x$.
Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2k}\frac{d}{dx}\left[\cos^2 x\,\operatorname{ctg}^{k-1} x\, f'_x(x)\right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Из п. 3° уравнения 3.8.3 следует, что допустимый общий вид правой части дается формулой

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \qquad A = -F'_x(b), \quad B = \tfrac{1}{2}\big[bF'_x(b) - F(0) - F(b)\big],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

20. $\displaystyle \int_a^b \frac{y(t)}{|\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)|^k}\,dt = f(x), \qquad 0 < k < 1.$

Частный случай уравнения 3.8.7 при $g(x) = \operatorname{tg}(\lambda x) + \beta$, где β — любое.

21. $\displaystyle\int_0^a \big|k\,\mathrm{tg}(\lambda x) - t\big|\, y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x) = k\,\mathrm{tg}(\lambda x)$.

22. $\displaystyle\int_0^a \big|x - k\,\mathrm{tg}(\lambda t)\big|\, y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(t) = k\,\mathrm{tg}(\lambda t)$.

3.5-4. Ядра уравнений содержат котангенс

23. $\displaystyle\int_a^b \big|\mathrm{ctg}(\lambda x) - \mathrm{ctg}(\lambda t)\big|\, y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \mathrm{ctg}(\lambda x)$.

24. $\displaystyle\int_a^b \big|\mathrm{ctg}^k x - \mathrm{ctg}^k t\big|\, y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < k < 1.$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \mathrm{ctg}^k x$.

3.5-5. Ядра содержат комбинации тригонометрических функций

25. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \big[\cos(xt) + \sin(xt)\big]\, y(t)\,dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \big[\cos(xt) + \sin(xt)\big] f(t)\,dt.$$

Исходное уравнение и выражение для его решения представляют собой прямое и обратное преобразования Хартли.

⦿ *Литература*: D. Zwillinger (1989).

26. $\displaystyle\int_0^{\infty} \big[\sin(xt) - xt\cos(xt)\big]\, y(t)\,dt = f(x).$

Это уравнение можно свести к частному случаю уравнения 3.7.1 при $\nu = \frac{3}{2}$. Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(xt) - xt\cos(xt)}{x^2t^2} f(t)\,dt.$$

3.5-6. Уравнения, содержащие неизвестную функцию сложного аргумента

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} y(\xi)\,dt = f(x), \qquad \xi = x\sin t.$

Уравнение Шлёмильха.

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\left[f(0) + x\int_0^{\pi/2} f'_\xi(\xi)\,dt\right], \qquad \xi = x\sin t.$$

⦿ *Литература*: Э. Уиттекер, Дж. Ватсон (1963, стр. 323), Ф. Д. Гахов (1977, стр. 602).

28. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} y(\xi)\,dt = f(x), \qquad \xi = x\sin^k t.$

Обобщенное уравнение Шлёмильха.

Частный случай уравнения 3.5.30 при $\lambda = 0$, $m = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{2k}{\pi} x^{\frac{k-1}{k}} \frac{d}{dx}\left[x^{\frac{1}{k}} \int_0^x \sin t\, f(\xi)\,dt\right], \qquad \xi = x\sin^k t.$$

29. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^\lambda t\, y(\xi)\,dt = f(x), \qquad \xi = x\sin^k t.$

Частный случай уравнения 3.5.30 при $m = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{2k}{\pi} x^{\frac{k-\lambda-1}{k}} \frac{d}{dx}\left[x^{\frac{\lambda+1}{k}} \int_0^x \sin^{\lambda+1} t\, f(\xi)\,dt\right], \qquad \xi = x\sin^k t.$$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^\lambda t\cos^m t\, y(\xi)\,dt = f(x), \qquad \xi = x\sin^k t.$

1°. Пусть $\lambda > -1$, $m > -1$, $k > 0$. Преобразование

$$z = x^{\frac{2}{k}}, \quad \zeta = z\sin^2 t, \quad w(\zeta) = \zeta^{\frac{\lambda-1}{2}} y\bigl(\zeta^{\frac{k}{2}}\bigr)$$

приводит к уравнению вида 1.1.43:

$$\int_0^z (z-\zeta)^{\frac{m-1}{2}} w(\zeta)\,d\zeta = F(z), \qquad F(z) = 2z^{\frac{\lambda+m}{2}} f\bigl(z^{\frac{k}{2}}\bigr).$$

2°. Решение при $-1 < m < 1$:

$$y(x) = \frac{2k}{\pi}\sin\left[\frac{\pi(1-m)}{2}\right] x^{\frac{k-\lambda-1}{k}} \frac{d}{dx}\left[x^{\frac{\lambda+1}{k}} \int_0^{\pi/2} \sin^{\lambda+1} t\,\mathrm{tg}^m t\, f(\xi)\,dt\right],$$

где $\xi = x\sin^k t$.

3.5-7. Сингулярное уравнение

31. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\Bigl(\frac{t-x}{2}\Bigr) y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, а правая часть удовлетворяет условию $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$.

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\Bigl(\frac{t-x}{2}\Bigr) f(t)\,dt + C,$$

где C — произвольная постоянная, причем $\displaystyle\int_0^{2\pi} y(t)\,dt = 2\pi C$.

Исходное уравнение и выражение для его решения представляют собой прямое и обратное преобразования Гильберта (в несимметричной форме).

⊙ *Литература*: Ф. Д. Гахов (1977).

3.6. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций

3.6-1. Ядра содержат гиперболические и логарифмические функции

1. $\displaystyle\int_a^b \ln\bigl|\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)\bigr|\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.9 при $g(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$.

2. $\displaystyle\int_a^b \ln\bigl|\operatorname{sh}(\lambda x) - \operatorname{sh}(\lambda t)\bigr|\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.9 при $g(x) = \operatorname{sh}(\lambda x)$.

3. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \ln\left[\frac{\operatorname{sh}\bigl(\frac{1}{2}A\bigr)}{2\operatorname{sh}\bigl(\frac{1}{2}|x-t|\bigr)}\right] y(t)\, dt = f(x), \qquad -a \leqslant x \leqslant a.$

Решение при $0 < a < A$:

$$
\begin{aligned}
y(x) = {} & \frac{1}{2M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int_{-a}^{a} w(t,a) f(t)\, dt\right] w(x,a) - {} \\
& - \frac{1}{2}\int_{|x|}^{a} w(x,\xi)\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{M'(\xi)}\frac{d}{d\xi}\int_{-\xi}^{\xi} w(t,\xi) f(t)\, dt\right] d\xi - {} \\
& - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_{|x|}^{a}\frac{w(x,\xi)}{M'(\xi)}\left[\int_{-\xi}^{\xi} w(t,\xi)\, df(t)\right] d\xi,
\end{aligned}
$$

где штрих обозначает производную по соответствующему аргументу и

$$
M(\xi) = \left[\ln\left(\frac{\operatorname{sh}\bigl(\frac{1}{2}A\bigr)}{\operatorname{sh}\bigl(\frac{1}{2}\xi\bigr)}\right)\right]^{-1}, \qquad w(x,\xi) = \frac{\operatorname{ch}\bigl(\frac{1}{2}x\bigr) M(\xi)}{\pi\sqrt{2\operatorname{ch}\xi - 2\operatorname{ch} x}}.
$$

⦿ *Литература*: И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн (1967, стр. 245).

4. $\displaystyle\int_a^b \ln\bigl|\operatorname{th}(\lambda x) - \operatorname{th}(\lambda t)\bigr|\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.9 при $g(x) = \operatorname{th}(\lambda x)$.

5. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \ln\bigl[\operatorname{cth}\bigl(\tfrac{1}{4}|x-t|\bigr)\bigr]\, y(t)\, dt = f(x), \qquad -a \leqslant x \leqslant a.$

Решение:

$$
\begin{aligned}
y(x) = {} & \frac{1}{2M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int_{-a}^{a} w(t,a) f(t)\, dt\right] w(x,a) - {} \\
& - \frac{1}{2}\int_{|x|}^{a} w(x,\xi)\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{M'(\xi)}\frac{d}{d\xi}\int_{-\xi}^{\xi} w(t,\xi) f(t)\, dt\right] d\xi - {} \\
& - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_{|x|}^{a}\frac{w(x,\xi)}{M'(\xi)}\left[\int_{-\xi}^{\xi} w(t,\xi)\, df(t)\right] d\xi,
\end{aligned}
$$

где штрих обозначает производную по соответствующему аргументу и

$$
M(\xi) = \frac{P_{-1/2}(\operatorname{ch}\xi)}{Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\xi)}, \qquad w(x,\xi) = \frac{1}{\pi Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\xi)\sqrt{2\operatorname{ch}\xi - 2\operatorname{ch} x}},
$$

$P_{-1/2}(\operatorname{ch}\xi)$, $Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\xi)$ — функции Лежандра первого и второго рода.

⦿ *Литература*: И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн (1967, стр. 245).

3.6-2. Ядра содержат логарифмические и тригонометрические функции

6. $\displaystyle\int_a^b \ln\bigl|\cos(\lambda x) - \cos(\lambda t)\bigr|\, y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.9 при $g(x) = \cos(\lambda x)$.

7. $\displaystyle\int_a^b \ln\bigl|\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)\bigr|\, y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.9 при $g(x) = \sin(\lambda x)$.

8. $\displaystyle\int_{-a}^a \ln\left[\frac{\sin\bigl(\frac{1}{2}A\bigr)}{2\sin\bigl(\frac{1}{2}|x-t|\bigr)}\right] y(t)\,dt = f(x), \qquad -a \leqslant x \leqslant a.$

Решение при $0 < a < A$:

$$
\begin{aligned}
y(x) = {} & \frac{1}{2M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int_{-a}^a w(t,a)f(t)\,dt\right] w(x,a) - \\
& - \frac{1}{2}\int_{|x|}^a w(x,\xi)\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{M'(\xi)}\frac{d}{d\xi}\int_{-\xi}^{\xi} w(t,\xi)f(t)\,dt\right] d\xi - \\
& - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_{|x|}^a \frac{w(x,\xi)}{M'(\xi)}\left[\int_{-\xi}^{\xi} w(t,\xi)\,df(t)\right] d\xi,
\end{aligned}
$$

где штрих обозначает производную по соответствующему аргументу и

$$
M(\xi) = \left[\ln\left(\frac{\sin\bigl(\frac{1}{2}A\bigr)}{\sin\bigl(\frac{1}{2}\xi\bigr)}\right)\right]^{-1}, \qquad w(x,\xi) = \frac{\cos\bigl(\frac{1}{2}\xi\bigr)M(\xi)}{\pi\sqrt{2\cos x - 2\cos\xi}}.
$$

◉ *Литература*: И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн (1967, стр. 245).

3.7. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции

3.7-1. Ядра содержат функции Бесселя

1. $\displaystyle\int_0^\infty tJ_\nu(xt)y(t)\,dt = f(x), \qquad \nu > -\tfrac{1}{2}.$

Здесь J_ν — функция Бесселя первого рода.
Решение:

$$
y(x) = \int_0^\infty tJ_\nu(xt)f(t)\,dt.
$$

Исходное уравнение и выражение для его решения представляют собой прямое и обратное преобразования Ханкеля.

◉ *Литература*: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 77).

2. $\displaystyle\int_a^b \bigl|J_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda t)\bigr|\, y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = J_\nu(\lambda x)$, где J_ν — функция Бесселя первого рода.

3. $\displaystyle\int_a^b \bigl|Y_\nu(\lambda x) - Y_\nu(\lambda t)\bigr|\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = Y_\nu(\lambda x)$, где Y_ν — функция Бесселя второго рода.

3.7-2. Ядра содержат модифицированные функции Бесселя

4. $\displaystyle\int_a^b \bigl|I_\nu(\lambda x) - I_\nu(\lambda t)\bigr|\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = I_\nu(\lambda x)$, где I_ν — модифицированная функция Бесселя первого рода.

5. $\displaystyle\int_a^b \bigl|K_\nu(\lambda x) - K_\nu(\lambda t)\bigr|\, y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = K_\nu(\lambda x)$, где K_ν — модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда).

6. $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{zt}\, K_\nu(zt) y(t)\, dt = f(z).$

Здесь K_ν — модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда).

Левая часть этого уравнения с точностью до постоянного множителя является преобразованием Мейера функции $y(t)$ (переменная z рассматривается в комплексной плоскости).

Решение:

$$y(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{zt}\, I_\nu(zt) f(z)\, dz.$$

Для конкретных функций $f(z)$ для вычисления интеграла можно использовать таблицы интегральных преобразований Мейера.

⦿ *Литература*: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 479).

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty K_0\bigl(|x - t|\bigr) y(t)\, dt = f(x).$

Здесь K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода.

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \int_{-\infty}^\infty K_0\bigl(|x - t|\bigr) f(t)\, dt.$$

⦿ *Литература*: D. Zwillinger (1989).

3.7-3. Другие ядра

8. $\displaystyle\int_0^a K\left(\frac{2\sqrt{xt}}{x + t} \right) \frac{y(t)\, dt}{x + t} = f(x).$

Здесь $K(z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - z^2 t^2)}}$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Решение:

$$y(x) = -\frac{4}{\pi^2} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{tF(t)\, dt}{\sqrt{t^2 - x^2}}, \qquad F(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{sf(s)\, ds}{\sqrt{t^2 - s^2}}.$$

⦿ *Литература*: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 35).

9. $\displaystyle\int_0^a F\left(\frac{\beta}{2},\ \frac{\beta+1}{2},\ \mu;\ \frac{4x^2t^2}{(x^2+t^2)^2}\right)\frac{y(t)\,dt}{(x^2+t^2)^\beta} = f(x).$

Здесь $0<a\leqslant\infty$, $0<\beta<\mu<\beta+1$, $F(a,b,c;z)$ — гипергеометрическая функция. Решение:

$$y(x) = \frac{x^{2\mu-2}}{\Gamma(1+\beta-\mu)}\frac{d}{dx}\int_x^a \frac{tg(t)\,dt}{(t^2-x^2)^{\mu-\beta}},$$

$$g(t) = \frac{2\,\Gamma(\beta)\sin[(\beta-\mu)\pi]}{\pi\Gamma(\mu)}t^{1-2\beta}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{s^{2\mu-1}f(s)\,ds}{(t^2-s^2)^{\mu-\beta}}.$$

Если $a=\infty$ и функция $f(x)$ дифференцируема, то решение можно представить также в следующем виде:

$$y(x) = A\frac{d}{dt}\int_0^\infty \frac{(xt)^{2\mu}f'_t(t)}{(x^2+t^2)^{2\mu-\beta}}F\left(\mu-\frac{\beta}{2},\ \mu+\frac{1-\beta}{2},\ \mu+1;\ \frac{4x^2t^2}{(x^2+t^2)^2}\right)dt,$$

где $\displaystyle A = \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(2\mu-\beta)\sin[(\beta-\mu)\pi]}{\pi\Gamma(\mu)\,\Gamma(1+\mu)}.$

⊙ *Литература*: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 34).

3.8. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции

3.8-1. Уравнения с вырожденным ядром

1. $\displaystyle\int_a^b \bigl[g_1(x)h_1(t)+g_2(x)h_2(t)\bigr]y(t)\,dt = f(x).$

Это интегральное уравнение имеет решения только тогда, когда его правая часть представима в виде

$$f(x) = A_1g_1(x)+A_2g_2(x), \qquad A_1=\mathrm{const},\ A_2=\mathrm{const}. \tag{1}$$

В этом случае любая функция $y=y(x)$, удовлетворяющая условиям типа нормировки

$$\int_a^b h_1(t)y(t)\,dt = A_1, \qquad \int_a^b h_2(t)y(t)\,dt = A_2, \tag{2}$$

будет решением интегрального уравнения.

Если правая часть уравнения имеет вид, отличный от (1), то интегральное уравнение не имеет решений.

2. $\displaystyle\int_a^b \left[\sum_{k=0}^n g_k(x)h_k(t)\right]y(t)\,dt = f(x).$

Это интегральное уравнение имеет решения только тогда, когда его правая часть представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^n A_kg_k(x), \tag{1}$$

где A_k — некоторые постоянные. В этом случае любая функция $y=y(x)$, удовлетворяющая условиям типа нормировки

$$\int_a^b h_k(t)y(t)\,dt = A_k \qquad (k=1,\,\dots,\,n), \tag{2}$$

будет решением интегрального уравнения.

Если правая часть уравнения имеет вид, отличный от (1), то интегральное уравнение не имеет решений.

3.8-2. Уравнения, содержащие знак модуля

3. $\displaystyle\int_a^b |g(x) - g(t)|\, y(t)\, dt = f(x).$

Пусть $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$; в пп. 1° и 2° считаем, что $0 < g'_x(x) < \infty$.

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_a^x \bigl[g(x) - g(t)\bigr] y(t)\, dt + \int_x^b \bigl[g(t) - g(x)\bigr] y(t)\, dt = f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по x, имеем

$$g'_x(x) \int_a^x y(t)\, dt - g'_x(x) \int_x^b y(t)\, dt = f'_x(x). \tag{2}$$

Поделим обе части (2) на $g'_x(x)$ и продифференцируем полученное выражение. В итоге находим решение

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{g'_x(x)} \right]. \tag{3}$$

2°. Покажем, что правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\int_a^b \bigl[g(t) - g(a)\bigr] y(t)\, dt = f(a), \qquad \int_a^b \bigl[g(b) - g(t)\bigr] y(t)\, dt = f(b). \tag{4}$$

Подставим в равенства (4) функцию $y(x)$ из (3). После интегрирования по частям получим искомые условия для функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} \bigl[g(b) - g(a)\bigr] \frac{f'_x(b)}{g'_x(b)} &= f(a) + f(b), \\ \bigl[g(a) - g(b)\bigr] \frac{f'_x(a)}{g'_x(a)} &= f(a) + f(b). \end{aligned} \tag{5}$$

Отметим полезное следствие этих условий: $f'_x(b) g'_x(a) + f'_x(a) g'_x(b) = 0$.

Условия (5) позволяют найти допустимый общий вид правой части рассматриваемого интегрального уравнения

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \tag{6}$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной), а коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$A = -\frac{g'_x(a) F'_x(b) + g'_x(b) F'_x(a)}{g'_x(a) + g'_x(b)},$$

$$B = -\tfrac{1}{2} A(a + b) - \tfrac{1}{2} \bigl[F(a) + F(b)\bigr] - \frac{g(b) - g(a)}{2 g'_x(a)} \bigl[A + F'_x(a)\bigr].$$

3°. Если вблизи границы области интегрирования для $x \to a$ функцию $g(x)$ можно представить в виде $g(x) = O(x-a)^k$ при $0 < k < 1$ (т. е. производная g'_x неограничена при $x \to a$), то решение интегрального уравнения также описывается формулой (3). При этом правая часть интегрального уравнения должна удовлетворять условиям

$$f(a) + f(b) = 0, \qquad f'_x(b) = 0. \tag{7}$$

Общий вид правой части интегрального уравнения, как и ранее, определяется выражением (6), где коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$A = -F'_x(b), \qquad B = \tfrac{1}{2} \bigl[(a + b) F'_x(b) - F(a) - F(b)\bigr].$$

4°. При $g'_x(a)=0$ правая часть интегрального уравнения должна удовлетворять условиям

$$f'_x(a)=0, \qquad \big[g(b)-g(a)\big]f'_x(b)=\big[f(a)+f(b)\big]g'_x(b).$$

Общий вид правой части интегрального уравнения, как и ранее, определяется выражением (6), где коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$A=-F'_x(a), \qquad B=\tfrac{1}{2}\big[(a+b)F'_x(a)-F(a)-F(b)\big]+\frac{g(b)-g(a)}{2g'_x(b)}\big[F'_x(b)-F'_x(a)\big].$$

4. $\displaystyle\int_0^a \big|g(x)-g(\lambda t)\big|\,y(t)\,dt=f(x), \qquad \lambda>0.$

Считаем, что $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant t\leqslant a$; $0<g'_x(x)<\infty$.

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_0^{x/\lambda}\big[g(x)-g(\lambda t)\big]y(t)\,dt+\int_{x/\lambda}^a\big[g(\lambda t)-g(x)\big]y(t)\,dt=f(x). \qquad (1)$$

Дифференцируя (1) по x, имеем

$$g'_x(x)\int_0^{x/\lambda}y(t)\,dt-g'_x(x)\int_{x/\lambda}^a y(t)\,dt=f'_x(x). \qquad (2)$$

Поделим обе части (2) на $g'_x(x)$ и продифференцируем полученное выражение. Имеем $y(x/\lambda)=\frac{1}{2}\lambda\big[f'_x(x)/g'_x(x)\big]'_x$. Заменяя здесь x на λx, находим решение

$$y(x)=\frac{\lambda}{2}\frac{d}{dz}\left[\frac{f'_z(z)}{g'_z(z)}\right], \qquad z=\lambda x. \qquad (3)$$

2°. Покажем, что правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) и (2) $x=0$, имеем два следствия:

$$\int_0^a\big[g(\lambda t)-g(0)\big]y(t)\,dt=f(0), \qquad g'_x(0)\int_0^a y(t)\,dt=-f'_x(0). \qquad (4)$$

Подставим в равенства (4) функцию $y(x)$ из (3). После интегрирования по частям получим искомые условия для функции $f(x)$:

$$\begin{gathered} f'_x(0)g'_x(\lambda a)+f'_x(\lambda a)g'_x(0)=0,\\ \big[g(\lambda a)-g(0)\big]\frac{f'_x(\lambda a)}{g'_x(\lambda a)}=f(0)+f(\lambda a). \end{gathered} \qquad (5)$$

Условия (5) позволяют найти допустимый общий вид правой части рассматриваемого интегрального уравнения

$$f(x)=F(x)+Ax+B, \qquad (6)$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной), а коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$A=-\frac{g'_x(0)F'_x(\lambda a)+g'_x(\lambda a)F'_x(0)}{g'_x(0)+g'_x(\lambda a)},$$

$$B=-\tfrac{1}{2}Aa\lambda-\tfrac{1}{2}\big[F(0)+F(\lambda a)\big]-\frac{g(\lambda a)-g(0)}{2g'_x(0)}\big[A+F'_x(0)\big].$$

3°. Если вблизи границы области интегрирования для $x\to 0$ функцию $g(x)$ можно представить в виде $g(x)=O(x^k)$ при $0<k<1$ (т. е. производная g'_x неограничена при $x\to 0$), то решение интегрального уравнения также описывается формулой (3). При этом правая часть интегрального уравнения должна удовлетворять условиям

$$f(0)+f(\lambda a)=0, \qquad f'_x(\lambda a)=0. \qquad (7)$$

Общий вид правой части интегрального уравнения, как и ранее, определяется выражением (6), где коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$A=-F'_x(\lambda a), \qquad B=\tfrac{1}{2}\big[a\lambda F'_x(\lambda a)-F(0)-F(\lambda a)\big].$$

5. $\displaystyle\int_0^a \bigl|g(x)-t\bigr|\,y(t)\,dt=f(x).$

Считаем, что $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant t\leqslant a$; $g(0)=0$, $0<g'_x(x)<\infty$.

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_0^{g(x)}\bigl[g(x)-t\bigr]y(t)\,dt+\int_{g(x)}^a\bigl[t-g(x)\bigr]y(t)\,dt=f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по x, имеем

$$g'_x(x)\int_0^{g(x)}y(t)\,dt-g'_x(x)\int_{g(x)}^a y(t)\,dt=f'_x(x). \tag{2}$$

Поделим обе части (2) на $g'_x(x)$ и продифференцируем полученное выражение. Имеем $2g'_x(x)y\bigl(g(x)\bigr)=\bigl[f'_x(x)/g'_x(x)\bigr]'_x$. Отсюда находим решение

$$y(x)=\frac{1}{2g'_z(z)}\,\frac{d}{dz}\left[\frac{f'_z(z)}{g'_z(z)}\right],\qquad z=g^{-1}(x), \tag{3}$$

где g^{-1} — обратная функция к g.

2°. Покажем, что правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) и (2) $x=0$, имеем два следствия:

$$\int_0^a ty(t)\,dt=f(0),\qquad g'_x(0)\int_0^a y(t)\,dt=-f'_x(0). \tag{4}$$

Подставим в равенства (4) функцию $y(x)$ из (3). После интегрирования по частям получим искомые условия для функции $f(x)$:

$$\begin{gathered}f'_x(0)g'_x(x_a)+f'_x(x_a)g'_x(0)=0,\quad x_a=g^{-1}(a);\\ g(x_a)\frac{f'_x(x_a)}{g'_x(x_a)}=f(0)+f(x_a).\end{gathered} \tag{5}$$

Условия (5) позволяют найти допустимый общий вид правой части рассматриваемого интегрального уравнения

$$f(x)=F(x)+Ax+B, \tag{6}$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной), а коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$A=-\frac{g'_x(0)F'_x(x_a)+g'_x(x_a)F'_x(0)}{g'_x(0)+g'_x(x_a)},\qquad x_a=g^{-1}(a),$$
$$B=-\tfrac12 Ax_a-\tfrac12\bigl[F(0)+F(x_a)\bigr]-\frac{g(x_a)}{2g'_x(0)}\bigl[A+F'_x(0)\bigr].$$

3°. Если вблизи границы области интегрирования для $x\to0$ функцию $g(x)$ можно представить в виде $g(x)=O(x^k)$ при $0<k<1$ (т. е. производная g'_x неограничена при $x\to0$), то решение интегрального уравнения также описывается формулой (3). При этом правая часть интегрального уравнения должна удовлетворять условиям

$$f(0)+f(x_a)=0,\qquad f'_x(x_a)=0. \tag{7}$$

Общий вид правой части интегрального уравнения, как и ранее, определяется выражением (6), где коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$A=-F'_x(x_a),\qquad B=\tfrac12\bigl[x_aF'_x(x_a)-F(0)-F(x_a)\bigr].$$

6. $\displaystyle\int_0^a \bigl|x-g(t)\bigr|\,y(t)\,dt=f(x).$

Считаем, что $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant t\leqslant a$; $g(0)=0$, $0<g'_x(x)<\infty$.

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_0^{g^{-1}(x)}\bigl[x-g(t)\bigr]y(t)\,dt+\int_{g^{-1}(x)}^a\bigl[g(t)-x\bigr]y(t)\,dt=f(x),\tag{1}$$

где g^{-1} — обратная функция к g. Дифференцируя (1) по x, имеем

$$\int_0^{g^{-1}(x)}y(t)\,dt-\int_{g^{-1}(x)}^a y(t)\,dt=f'_x(x).\tag{2}$$

Дифференцируя полученное выражение, имеем $2y\bigl(g^{-1}(x)\bigr)=g'_x(x)f''_{xx}(x)$. Отсюда находим решение

$$y(x)=\tfrac{1}{2}g'_z(z)f''_{zz}(z),\qquad z=g(x).\tag{3}$$

2°. Покажем, что правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) и (2) $x=0$, имеем два следствия:

$$\int_0^a g(t)y(t)\,dt=f(0),\qquad \int_0^a y(t)\,dt=-f'_x(0).\tag{4}$$

Подставим в равенства (4) функцию $y(x)$ из (3). После интегрирования по частям получим искомые условия для функции $f(x)$:

$$x_af'_x(x_a)=f(0)+f(x_a),\qquad f'_x(0)+f'_x(x_a)=0,\qquad x_a=g(a).\tag{5}$$

Условия (5) позволяют найти допустимый общий вид правой части рассматриваемого интегрального уравнения:

$$f(x)=F(x)+Ax+B,$$
$$A=-\tfrac{1}{2}\bigl[F'_x(0)+F'_x(x_a)\bigr],\quad B=\tfrac{1}{2}\bigl[x_aF'_x(0)-F(x_a)-F(0)\bigr],\quad x_a=g(a),$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

7. $\displaystyle\int_a^b \frac{y(t)}{|g(x)-g(t)|^k}\,dt=f(x),\qquad 0<k<1.$

Пусть $g'_x\neq 0$. Преобразование

$$z=g(x),\quad \tau=g(t),\quad w(\tau)=\frac{1}{g'_t(t)}y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.1.30:

$$\int_A^B\frac{w(\tau)}{|z-\tau|^k}\,d\tau=F(z),\qquad A=g(a),\quad B=g(b),$$

где функция $F=F(z)$ получается путем исключения x из равенств $z=g(x)$, $F=f(x)$.

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{y(t)}{|g(x)-h(t)|^k}\,dt=f(x),\qquad 0<k<1.$

Пусть $g(0)=0$, $g(1)=1$, $g'_x>0$; $h(0)=0$, $h(1)=1$, $h'_t>0$. Преобразование

$$z=g(x),\quad \tau=h(t),\quad w(\tau)=\frac{1}{h'_t(t)}y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.1.29:

$$\int_0^1\frac{w(\tau)}{|z-\tau|^k}\,d\tau=F(z),$$

где функция $F=F(z)$ получается путем исключения x из равенств $z=g(x)$, $F=f(x)$.

9. $\displaystyle\int_a^b y(t)\ln|g(x)-g(t)|\,dt = f(x).$

Пусть $g'_x \neq 0$. Преобразование

$$z = g(x), \quad \tau = g(t), \quad w(\tau) = \frac{1}{g'_t(t)}y(t)$$

приводит к уравнению Карлемана 3.4.2:

$$\int_A^B \ln|z-\tau|w(\tau)\,d\tau = F(z), \qquad A = g(a), \quad B = g(b),$$

где функция $F = F(z)$ получается путем исключения x из равенств $z = g(x)$, $F = f(x)$.

10. $\displaystyle\int_0^1 y(t)\ln|g(x)-h(t)|\,dt = f(x).$

Пусть $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g'_x > 0$; $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h'_t > 0$. Преобразование

$$z = g(x), \quad \tau = h(t), \quad w(\tau) = \frac{1}{h'_t(t)}y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.4.2:

$$\int_0^1 \ln|z-\tau|w(\tau)\,d\tau = F(z),$$

где функция $F = F(z)$ получается путем исключения x из равенств $z = g(x)$, $F = f(x)$.

3.8-3. Уравнения с разностным ядром: $K(x,t) = K(x-t)$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = Ax^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

1°. Решение при $n = 0$:

$$y(x) = \frac{A}{B}, \qquad B = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx.$$

2°. Решение при $n = 1$:

$$y(x) = \frac{A}{B}x + \frac{AC}{B^2}, \qquad B = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx, \quad C = \int_{-\infty}^{\infty} xK(x).$$

3°. Решение при $n \geqslant 2$:

$$y(x) = \left\{\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\frac{Ae^{\lambda x}}{B(\lambda)}\right]\right\}_{\lambda=0}, \qquad B(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-\lambda x}\,dx.$$

12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = Ae^{\lambda x}.$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B}e^{\lambda x}, \qquad B = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-\lambda x}\,dx.$$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = Ax^n e^{\lambda x}, \qquad n = 1, 2, \ldots$

1°. Решение при $n = 1$:

$$y(x) = \frac{A}{B}xe^{\lambda x} + \frac{AC}{B^2}e^{\lambda x},$$
$$B = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-\lambda x}\,dx, \quad C = \int_{-\infty}^{\infty} xK(x)e^{-\lambda x}\,dx.$$

2°. Решение при $n \geqslant 2$:

$$y(x) = \frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\frac{Ae^{\lambda x}}{B(\lambda)}\right], \qquad B(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-\lambda x}\,dx.$$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{AI_{\rm c} + BI_{\rm s}}{I_{\rm c}^2 + I_{\rm s}^2}\cos(\lambda x) + \frac{BI_{\rm c} - AI_{\rm s}}{I_{\rm c}^2 + I_{\rm s}^2}\sin(\lambda x),$$
$$I_{\rm c} = \int_{-\infty}^{\infty} K(z)\cos(\lambda z)\,dz, \quad I_{\rm s} = \int_{-\infty}^{\infty} K(z)\sin(\lambda z)\,dz.$$

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = f(x).$

Для решения этого уравнения используют преобразование Фурье.

1°. Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde f(u)}{\tilde K(u)}e^{iux}\,du,$$
$$\tilde f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\,dx, \quad \tilde K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-iux}\,dx.$$

Справедливо утверждение. Пусть $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, $K(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. Тогда для того чтобы существовало решение интегрального уравнения $y(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $\tilde f(u)/\tilde K(u) \in L_2(-\infty, \infty)$.

2°. Пусть функция $P(s)$, определенная равенством

$$\frac{1}{P(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}K(t)\,dt,$$

является полиномом степени n с вещественными корнями вида

$$P(s) = \left(1 - \frac{s}{a_1}\right)\left(1 - \frac{s}{a_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{s}{a_n}\right).$$

Тогда решение интегрального уравнения дается формулой

$$y(x) = P(D)f(x), \quad D = \frac{d}{dx}.$$

⊙ *Литература*: И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер (1958), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 27).

16. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = f(x).$

Уравнение Винера–Хопфа первого рода. Об этом уравнении см. в книге Ф. Д. Гахова, Ю. И. Черского (1978).

3.8-4. Другие уравнения вида $\int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = F(x)$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(ax-t)y(t)\,dt = Ae^{\lambda x}.$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B}\exp\Bigl(\frac{\lambda}{a}x\Bigr), \qquad B = \int_{-\infty}^{\infty} K(z)\exp\Bigl(-\frac{\lambda}{a}z\Bigr)\,dz.$$

18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(ax-t)y(t)\,dt = f(x).$

Замена $z = ax$ приводит к уравнению вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(z-t)y(t)\,dt = f(z/a).$$

19. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(ax+t)y(t)\,dt = Ae^{\lambda x}.$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B}\exp\Bigl(-\frac{\lambda}{a}x\Bigr), \qquad B = \int_{-\infty}^{\infty} K(z)\exp\Bigl(-\frac{\lambda}{a}z\Bigr)\,dz.$$

20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(ax+t)y(t)\,dt = f(x).$

Преобразование $\tau = -t$, $z = ax$, $y(t) = Y(\tau)$ приводит к уравнению вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(z-\tau)Y(\tau)\,dt = f(z/a).$$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [e^{\beta t}K(ax+t) + e^{\mu t}M(ax-t)]y(t)\,dt = Ae^{\lambda x}.$

Решение:

$$y(x) = A\,\frac{I_k(q)e^{px} - I_m(p)e^{qx}}{I_k(p)I_k(q) - I_m(p)I_m(q)}, \qquad p = -\frac{\lambda}{a} - \beta, \quad q = \frac{\lambda}{a} - \mu,$$

где

$$I_k(q) = \int_{-\infty}^{\infty} K(z)e^{(\beta+q)z}\,dz, \quad I_m(q) = \int_{-\infty}^{\infty} M(z)e^{-(\mu+q)z}\,dz.$$

22. $\displaystyle\int_0^{\infty} g(xt)y(t)\,dt = f(x).$

Положим

$$x = e^z, \quad t = e^{-\tau}, \quad y(t) = e^{\tau}w(\tau), \quad g(\xi) = G(\ln\xi), \quad f(\xi) = F(\ln\xi).$$

В результате получим интегральное уравнение с разностным ядром вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(z-\tau)w(\tau)\,d\tau = F(z).$$

23. $\displaystyle\int_0^{\infty} g\Bigl(\frac{x}{t}\Bigr)y(t)\,dt = f(x).$

Положим

$$x = e^z, \quad t = e^{\tau}, \quad y(t) = e^{-\tau}w(\tau), \quad g(\xi) = G(\ln\xi), \quad f(\xi) = F(\ln\xi).$$

В результате получим интегральное уравнение с разностным ядром вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(z-\tau)w(\tau)\,d\tau = F(z).$$

24. $\displaystyle\int_0^\infty g(x^\beta t^\lambda)\,y(t)\,dt = f(x), \qquad \beta > 0, \quad \lambda > 0.$

Положим

$$x = e^{z/\beta}, \quad t = e^{-\tau/\lambda}, \quad y(t) = e^{\tau/\lambda} w(\tau), \quad g(\xi) = G(\ln\xi), \quad f(\xi) = \tfrac{1}{\lambda} F(\beta\ln\xi).$$

В результате получим интегральное уравнение с разностным ядром вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(z-\tau)w(\tau)\,d\tau = F(z).$$

25. $\displaystyle\int_0^\infty g\biggl(\frac{x^\beta}{t^\lambda}\biggr)y(t)\,dt = f(x), \qquad \beta > 0, \quad \lambda > 0.$

Положим

$$x = e^{z/\beta}, \quad t = e^{\tau/\lambda}, \quad y(t) = e^{-\tau/\lambda} w(\tau), \quad g(\xi) = G(\ln\xi), \quad f(\xi) = \tfrac{1}{\lambda} F(\beta\ln\xi).$$

В результате получим интегральное уравнение с разностным ядром вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(z-\tau)w(\tau)\,d\tau = F(z).$$

3.8-5. Уравнения вида $\int_a^b K(x,t)y(\cdots)\,dt = F(x)$

26. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(xt)\,dt = Ax + B.$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{I_1}x + \frac{B}{I_0}, \qquad I_0 = \int_a^b f(t)\,dt, \quad I_1 = \int_a^b tf(t)\,dt.$$

27. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(xt)\,dt = Ax^\beta.$

Решение: lution

$$y(x) = \frac{A}{B}x^\beta, \qquad B = \int_a^b f(t)t^\beta\,dt.$$

28. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(xt)\,dt = A\ln x + B.$

Решение:

$$y(x) = p\ln x + q,$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{A}{I_0}, \quad q = \frac{B}{I_0} - \frac{AI_l}{I_0^2}, \qquad I_0 = \int_a^b f(t)\,dt, \quad I_l = \int_a^b f(t)\ln t\,dt.$$

29. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(xt)\,dt = Ax^\beta \ln x.$

Решение:

$$y(x) = px^\beta\ln x + qx^\beta,$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{A}{I_1}, \quad q = -\frac{AI_2}{I_1^2}, \qquad I_1 = \int_a^b f(t)t^\beta dt, \quad I_2 = \int_a^b f(t)t^\beta \ln t\,dt.$$

30. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(xt)\,dt = A\cos(\ln x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{AI_\text{c}}{I_\text{c}^2 + I_\text{s}^2}\cos(\ln x) + \frac{AI_\text{s}}{I_\text{c}^2 + I_\text{s}^2}\sin(\ln x),$$

$$I_\text{c} = \int_a^b f(t)\cos(\ln t)\,dt, \quad I_\text{s} = \int_a^b f(t)\sin(\ln t)\,dt.$$

31. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(xt)\,dt = A\sin(\ln x).$

Решение:

$$y(x) = -\frac{AI_\text{s}}{I_\text{c}^2 + I_\text{s}^2}\cos(\ln x) + \frac{AI_\text{c}}{I_\text{c}^2 + I_\text{s}^2}\sin(\ln x),$$

$$I_\text{c} = \int_a^b f(t)\cos(\ln t)\,dt, \quad I_\text{s} = \int_a^b f(t)\sin(\ln t)\,dt.$$

32. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(xt)\,dt = Ax^\beta\cos(\ln x) + Bx^\beta\sin(\ln x).$

Решение:

$$y(x) = px^\beta\cos(\ln x) + qx^\beta\sin(\ln x),$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{AI_\text{c} - BI_\text{s}}{I_\text{c}^2 + I_\text{s}^2}, \quad q = \frac{AI_\text{s} + BI_\text{c}}{I_\text{c}^2 + I_\text{s}^2},$$

$$I_\text{c} = \int_a^b f(t)t^\beta\cos(\ln t)\,dt, \quad I_\text{s} = \int_a^b f(t)t^\beta\sin(\ln t)\,dt.$$

33. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(x-t)\,dt = Ax + B.$

Решение:

$$y(x) = px + q,$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{A}{I_0}, \quad q = \frac{AI_1}{I_0^2} + \frac{B}{I_0}, \qquad I_0 = \int_a^b f(t)\,dt, \quad I_1 = \int_a^b tf(t)\,dt.$$

34. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(x-t)\,dt = Ae^{\lambda x}.$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B}e^{\lambda x}, \qquad B = \int_a^b f(t)\exp(-\lambda t)\,dt.$$

35. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(x-t)\,dt = A\cos(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = -\frac{AI_\text{s}}{I_\text{c}^2 + I_\text{s}^2}\sin(\lambda x) + \frac{AI_\text{c}}{I_\text{c}^2 + I_\text{s}^2}\cos(\lambda x),$$

$$I_\text{c} = \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt, \quad I_\text{s} = \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt.$$

36. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(x-t)\,dt = A\sin(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{AI_\text{c}}{I_\text{c}^2 + I_\text{s}^2}\sin(\lambda x) + \frac{AI_\text{s}}{I_\text{c}^2 + I_\text{s}^2}\cos(\lambda x),$$

$$I_\text{c} = \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt, \quad I_\text{s} = \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt.$$

37. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(x-t)\,dt = e^{\mu x}(A\sin\lambda x + B\cos\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = e^{\mu x}(p\sin\lambda x + q\cos\lambda x),$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{AI_\text{c} - BI_\text{s}}{I_\text{c}^2 + I_\text{s}^2}, \qquad q = \frac{AI_\text{s} + BI_\text{c}}{I_\text{c}^2 + I_\text{s}^2},$$

$$I_\text{c} = \int_a^b f(t)e^{-\mu t}\cos(\lambda t)\,dt, \quad I_\text{s} = \int_a^b f(t)e^{-\mu t}\sin(\lambda t)\,dt.$$

38. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(x-t)\,dt = g(x).$

1°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k\exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{B_k}\exp(\lambda_k x), \qquad B_k = \int_a^b f(t)\exp(-\lambda_k t)\,dt.$$

2°. Для полиномиальной правой части уравнения $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x) = e^{\lambda x}\sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n} B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k\cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k\cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^{n} C_k\sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k\sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k\cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^{n} C_k\sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

7°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

8°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

9°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

10°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^{n} B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^{n} C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

11°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^{n} B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^{n} C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

39. $\displaystyle\int_a^b f(t) y(x + \beta t)\, dt = Ax + B.$

Решение:

$$y(x) = px + q,$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{A}{I_0}, \quad q = \frac{B}{I_0} - \frac{A I_1 \beta}{I_0^2}, \qquad I_0 = \int_a^b f(t)\, dt, \quad I_1 = \int_a^b t f(t)\, dt.$$

40. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(x+\beta t)\,dt = Ae^{\lambda x}.$

Решение:
$$y(x)=\frac{A}{B}e^{\lambda x},\qquad B=\int_a^b f(t)\exp(\lambda\beta t)\,dt.$$

41. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(x+\beta t)\,dt = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x.$

Решение:
$$y(x)=p\sin\lambda x+q\cos\lambda x,$$
где коэффициенты p и q вычисляются по формулам
$$p=\frac{AI_{\rm c}+BI_{\rm s}}{I_{\rm c}^2+I_{\rm s}^2},\qquad q=\frac{BI_{\rm c}-AI_{\rm s}}{I_{\rm c}^2+I_{\rm s}^2},$$
$$I_{\rm c}=\int_a^b f(t)\cos(\lambda\beta t)\,dt,\quad I_{\rm s}=\int_a^b f(t)\sin(\lambda\beta t)\,dt.$$

42. $\displaystyle\int_0^1 y(\xi)\,dt = f(x),\qquad \xi=g(x)t.$

Считаем, что $g(0)=0$, $g(1)=1$, $g'_x\geqslant 0$.

1°. Замена $z=g(x)$ приводит к уравнению вида 3.1.41: $\displaystyle\int_0^1 y(zt)\,dt=F(z)$, где функция $F(z)$ находится путем исключения x из равенств $z=g(x)$, $F=f(x)$.

2°. Решение $y=y(z)$, записанное в параметрическом виде:
$$y(z)=\frac{g(x)}{g'_x(x)}f'_x(x)+f(x),\qquad z=g(x).$$

43. $\displaystyle\int_0^1 t^\lambda y(\xi)\,dt = f(x),\qquad \xi=g(x)t.$

Считаем, что $g(0)=0$, $g(1)=1$, $g'_x\geqslant 0$.

1°. Замена $z=g(x)$ приводит к уравнению вида 3.1.42: $\displaystyle\int_0^1 t^\lambda y(zt)\,dt=F(z)$, где функция $F(z)$ находится путем исключения x из равенств $z=g(x)$, $F=f(x)$.

2°. Решение $y=y(z)$, записанное в параметрическом виде:
$$y(z)=\frac{g(x)}{g'_x(x)}f'_x(x)+(\lambda+1)f(x),\qquad z=g(x).$$

44. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(\xi)\,dt = Ax^\beta,\qquad \xi=x\varphi(t).$

Решение:
$$y(x)=\frac{A}{B}x^\beta,\qquad B=\int_a^b f(t)\bigl[\varphi(t)\bigr]^\beta dt. \tag{1}$$

45. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(\xi)\,dt = g(x),\qquad \xi=x\varphi(t).$

1°. Для правой части $g(x)=\sum\limits_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид
$$y(x)=\sum_{k=0}^n\frac{A_k}{B_k}x^k,\qquad B_k=\int_a^b f(t)\bigl[\varphi(t)\bigr]^k dt.$$

2°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^{\lambda_k}$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{B_k} x^{\lambda_k}, \qquad B_k = \int_a^b f(t)\bigl[\varphi(t)\bigr]^{\lambda_k}\,dt.$$

3°. Для правой части уравнения $g(x) = \ln x \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \ln x \sum_{k=0}^{n} B_k x^k + \sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k (\ln x)^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k (\ln x)^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos(\lambda_k \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k \ln x) + \sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k \ln x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin(\lambda_k \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k \ln x) + \sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k \ln x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

46. $\displaystyle \int_a^b f(t) y(\xi)\,dt = g(x), \qquad \xi = x + \varphi(t).$

1°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{B_k} \exp(\lambda_k x), \qquad B_k = \int_a^b f(t) \exp\bigl[\lambda_k \varphi(t)\bigr]\,dt.$$

2°. Для полиномиальной правой части уравнения $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x) = e^{\lambda x} \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n} B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x)+\sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x)+\sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $g(x)=\cos(\lambda x)\sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\cos(\lambda x)\sum_{k=0}^{n} B_k x^k+\sin(\lambda x)\sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

7°. Для правой части $g(x)=\sin(\lambda x)\sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\cos(\lambda x)\sum_{k=0}^{n} B_k x^k+\sin(\lambda x)\sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

8°. Для правой части $g(x)=e^{\mu x}\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=e^{\mu x}\sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x)+e^{\mu x}\sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

9°. Для правой части $g(x)=e^{\mu x}\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=e^{\mu x}\sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x)+e^{\mu x}\sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

10°. Для правой части $g(x)=\cos(\lambda x)\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\cos(\lambda x)\sum_{k=1}^{n} B_k \exp(\mu_k x)+\sin(\lambda x)\sum_{k=1}^{n} C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

11°. Для правой части $g(x)=\sin(\lambda x)\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\cos(\lambda x)\sum_{k=1}^{n} B_k \exp(\mu_k x)+\sin(\lambda x)\sum_{k=1}^{n} C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4. Линейные уравнения второго рода с постоянными пределами интегрирования

► ***Обозначения:*** *$f = f(x)$, $g = g(x)$, $h = h(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$, $K = K(x)$ — произвольные функции A, B, C, D, E, a, b, c, l, α, β, γ, δ, λ, μ, ν — свободные параметры; n — целое неотрицательное число; i — мнимая единица.*

► **Предварительные замечания.** Число λ называется *характеристическим значением* или *характеристическим числом* интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) y(t)\, dt = f(x),$$

если существуют нетривиальные решения соответствующего однородного уравнения ($f(x) \equiv 0$). Сами же эти нетривиальные решения называются *собственными функциями* интегрального уравнения, соответствующими характеристическому значению λ. Если λ есть характеристическое значение, то число $1/\lambda$ называется *собственным значением* или *собственным числом* интегрального уравнения. Правильным значением параметра λ называется такое его значение, при котором упомянутое однородное уравнение имеет только тривиальное решение. Иногда характеристические значения и собственные функции интегрального уравнения Фредгольма называют характеристическими значениями и собственными функциями ядра $K(x,t)$. В приведенном выше уравнении обычно считается, что $a \leqslant x \leqslant b$.

4.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции

4.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t

1. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (x-t) y(t)\, dt = f(x).}$

Решение (при любом действительном λ):

$$y(x) = f(x) + \lambda (A_1 x + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{12 f_1 + 6\lambda\,(f_1 \Delta_2 - 2 f_2 \Delta_1)}{\lambda^2 \Delta_1^4 + 12}, \quad A_2 = \frac{-12 f_2 + 2\lambda\,(3 f_2 \Delta_2 - 2 f_1 \Delta_3)}{\lambda^2 \Delta_1^4 + 12},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\, dx, \quad f_2 = \int_a^b x f(x)\, dx, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

2. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (x+t) y(t)\, dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{6(b+a) + 4\sqrt{3(a^2+ab+b^2)}}{(a-b)^3}, \quad \lambda_2 = \frac{6(b+a) - 4\sqrt{3(a^2+ab+b^2)}}{(a-b)^3}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{12f_1 - 6\lambda(f_1\Delta_2 - 2f_2\Delta_1)}{12 - 12\lambda\Delta_2 - \lambda^2\Delta_1^4}, \quad A_2 = \frac{12f_2 - 2\lambda(3f_2\Delta_2 - 2f_1\Delta_3)}{12 - 12\lambda\Delta_2 - \lambda^2\Delta_1^4},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b xf(x)\,dx, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1:

$$y_1(x) = x + \frac{1}{\lambda_1(b-a)} - \frac{b+a}{2}.$$

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

3. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b (Ax + Bt)y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{3(A+B)(b+a) \pm \sqrt{9(A-B)^2(b+a)^2 + 48AB(a^2+ab+b^2)}}{AB(a-b)^3}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{12Af_1 - 6AB\lambda(f_1\Delta_2 - 2f_2\Delta_1)}{12 - 6(A+B)\lambda\Delta_2 - AB\lambda^2\Delta_1^4}, \quad A_2 = \frac{12Bf_2 - 2AB\lambda(3f_2\Delta_2 - 2f_1\Delta_3)}{12 - 6(A+B)\lambda\Delta_2 - AB\lambda^2\Delta_1^4},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b xf(x)\,dx, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1:

$$y_1(x) = x + \frac{1}{\lambda_1 A(b-a)} - \frac{b+a}{2}.$$

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{4}{(A+B)(b^2-a^2)}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*:

$$y_*(x) = x - \frac{(A-B)(b+a)}{4A}.$$

4. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2 x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.8.

5. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (Ax + Bt + C)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.7 при $g(x) = x$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x + A_2),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.7.

6. $\boldsymbol{y(x) + A \int_a^b |x-t|\,y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.36 при $g(t) = A$.

1°. Функция $y = y(x)$ удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + 2Ay = f''_{xx}(x). \tag{1}$$

Граничные условия для уравнения (1) имеют следующий вид (см. 4.9.36):

$$\begin{gathered} y'_x(a) + y'_x(b) = f'_x(a) + f'_x(b), \\ y(a) + y(b) + (b-a)y'_x(a) = f(a) + f(b) + (b-a)f'_x(a). \end{gathered} \tag{2}$$

Уравнение (1) вместе с граничными условиями (2) описывает решение исходного интегрального уравнения.

2°. При $A < 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx) + f(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)]f(t)\,dt, \quad k = \sqrt{-2A}, \tag{3}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $A > 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + f(x) - k\int_a^x \sin[k(x-t)]f(t)\,dt, \quad k = \sqrt{2A}. \tag{4}$$

Условия (2) позволяют найти постоянные интегрирования C_1, C_2 в решениях (3) и (4).

3°. В частном случае $a = 0$, $A > 0$ решение интегрального уравнения определяется по формуле (4), где

$$C_1 = k\frac{I_\text{s}(1+\cos\lambda) - I_\text{c}(\lambda + \sin\lambda)}{2 + 2\cos\lambda + \lambda\sin\lambda}, \qquad C_2 = k\frac{I_\text{s}\sin\lambda + I_\text{c}(1+\cos\lambda)}{2 + 2\cos\lambda + \lambda\sin\lambda},$$

$$k = \sqrt{2A}, \quad \lambda = bk, \quad I_\text{s} = \int_0^b \sin[k(b-t)]f(t)\,dt, \quad I_\text{c} = \int_0^b \cos[k(b-t)]f(t)\,dt.$$

4.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t

7. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (x^2 + t^2) y(t)\, dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + \sqrt{\frac{1}{5}(b^5 - a^5)(b - a)}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \sqrt{\frac{1}{5}(b^5 - a^5)(b - a)}}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^2 + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda\left(\frac{1}{3} f_1 \Delta_3 - f_2 \Delta_1\right)}{\lambda^2\left(\frac{1}{9}\Delta_3^2 - \frac{1}{5}\Delta_1\Delta_5\right) - \frac{2}{3}\lambda\Delta_3 + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda\left(\frac{1}{3} f_2 \Delta_3 - \frac{1}{5} f_1 \Delta_5\right)}{\lambda^2\left(\frac{1}{9}\Delta_3^2 - \frac{1}{5}\Delta_1\Delta_5\right) - \frac{2}{3}\lambda\Delta_3 + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\, dx, \quad f_2 = \int_a^b x^2 f(x)\, dx, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_1(x), \qquad y_1(x) = x^2 + \sqrt{\frac{b^5 - a^5}{5(b - a)}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_2(x), \qquad y_2(x) = x^2 - \sqrt{\frac{b^5 - a^5}{5(b - a)}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_2(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_2.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

8. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (x^2 - t^2) y(t)\, dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}(b^3 - a^3)^2 - \frac{1}{5}(b^5 - a^5)(b - a)}}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^2 + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 + \lambda\left(\frac{1}{3} f_1 \Delta_3 - f_2 \Delta_1\right)}{\lambda^2\left(\frac{1}{5}\Delta_1\Delta_5 - \frac{1}{9}\Delta_2^2\right) + 1}, \quad A_2 = \frac{-f_2 + \lambda\left(\frac{1}{3} f_2 \Delta_3 - \frac{1}{5} f_1 \Delta_5\right)}{\lambda^2\left(\frac{1}{5}\Delta_1\Delta_5 - \frac{1}{9}\Delta_2^2\right) + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\, dx, \quad f_2 = \int_a^b x^2 f(x)\, dx, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_1(x), \qquad y_1(x) = x^2 + \frac{3 - \lambda_1(b^3 - a^3)}{3\lambda_1(b - a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

9. $y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^2 + Bt^2) y(t)\, dt = f(x)$.

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{1}{3}(A+B)\Delta_3 \pm \sqrt{\frac{1}{9}(A-B)^2\Delta_3^2 + \frac{4}{5}AB\Delta_1\Delta_5}}{2AB\bigl(\frac{1}{9}\Delta_3^2 - \frac{1}{5}\Delta_1\Delta_5\bigr)}, \qquad \Delta_n = b^n - a^n.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^2 + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{Af_1 - AB\lambda\left(\frac{1}{3}f_1\Delta_3 - f_2\Delta_1\right)}{AB\lambda^2\left(\frac{1}{9}\Delta_3^2 - \frac{1}{5}\Delta_1\Delta_5\right) - \frac{1}{3}(A+B)\lambda\Delta_3 + 1},$$

$$A_2 = \frac{Bf_2 - AB\lambda\left(\frac{1}{3}f_2\Delta_3 - \frac{1}{5}f_1\Delta_5\right)}{AB\lambda^2\left(\frac{1}{9}\Delta_3^2 - \frac{1}{5}\Delta_1\Delta_5\right) - \frac{1}{3}(A+B)\lambda\Delta_3 + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\, dx, \quad f_2 = \int_a^b x^2 f(x)\, dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = x^2 + \frac{3 - \lambda_1 A(b^3 - a^3)}{3\lambda_1 A(b-a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{6}{(A+B)(b^3 - a^3)}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + C_1 y_*(x).$$

Здесь C_1 — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*:

$$y_*(x) = x^2 - \frac{(A-B)(b^3 - a^3)}{6A(b-a)}.$$

10. $y(x) - \lambda \int_a^b (xt - t^2) y(t)\, dt = f(x)$.

Частный случай уравнения 4.9.8 при $A = 0$, $B = 1$, $h(t) = t$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2 x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.8.

11. $y(x)-\lambda\int_a^b (x^2-xt)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $A=0$, $B=1$, $h(x)=x$.

Решение:

$$y(x)=f(x)+\lambda(E_1x^2+E_2x),$$

где E_1 и E_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.10.

12. $y(x)-\lambda\int_a^b (Bxt+Ct^2)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.9 при $A=0$, $h(t)=t$.

Решение:

$$y(x)=f(x)+\lambda(A_1+A_2x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.9.

13. $y(x)-\lambda\int_a^b (Bx^2+Cxt)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.11 при $A=0$, $h(x)=x$.

Решение:

$$y(x)=f(x)+\lambda(A_1x^2+A_2x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.11.

14. $y(x)-\lambda\int_a^b (Axt+Bx^2+Cx+D)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x)=Bx^2+Cx+D$, $h_1(t)=1$, $g_2(x)=x$, $h_2(t)=At$.

Решение:

$$y(x)=f(x)+\lambda[A_1(Bx^2+Cx+D)+A_2x],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

15. $y(x)-\lambda\int_a^b (Ax^2+Bt^2+Cx+Dt+E)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x)=Ax^2+Cx$, $h_1(t)=1$, $g_2(x)=1$, $h_2(t)=Bt^2+Dt+E$.

Решение:

$$y(x)=f(x)+\lambda[A_1(Ax^2+Cx)+A_2],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

16. $y(x)-\lambda\int_a^b [Ax+B+(Cx+D)(x-t)]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x)=Cx^2+(A+D)x+B$, $h_1(t)=1$, $g_2(x)=Cx+D$, $h_2(t)=-t$.

Решение:

$$y(x)=f(x)+\lambda[A_1(Cx^2+Ax+Dx+B)+A_2(Cx+D)],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

17. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [At + B + (Ct + D)(t - x)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = 1$, $h_1(t) = Ct^2 + (A + D)t + B$, $g_2(x) = x$, $h_2(t) = -(Ct + D)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2 x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

18. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (x - t)^2 y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.19 при $g(x) = x$, $h(t) = -t$, $m = 2$.

19. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (Ax + Bt)^2 y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.19 при $g(x) = Ax$, $h(t) = Bt$, $m = 2$.

4.1-3. Ядра уравнений в виде кубических полиномов по аргументам x, t

20. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (x^3 + t^3) y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\frac{1}{4}(b^4 - a^4) + \sqrt{\frac{1}{7}(b^7 - a^7)(b - a)}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\frac{1}{4}(b^4 - a^4) - \sqrt{\frac{1}{7}(b^7 - a^7)(b - a)}}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^3 + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda\left(\frac{1}{4} f_1 \Delta_4 - f_2 \Delta_1\right)}{\lambda^2\left(\frac{1}{16}\Delta_4^2 - \frac{1}{7}\Delta_1\Delta_7\right) - \frac{1}{2}\lambda\Delta_4 + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda\left(\frac{1}{4} f_2 \Delta_4 - \frac{1}{7} f_1 \Delta_7\right)}{\lambda^2\left(\frac{1}{16}\Delta_4^2 - \frac{1}{7}\Delta_1\Delta_7\right) - \frac{1}{2}\lambda\Delta_4 + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b x^3 f(x)\,dx, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_1(x), \qquad y_1(x) = x^3 + \sqrt{\frac{b^7 - a^7}{7(b - a)}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_2(x), \qquad y_2(x) = x^3 - \sqrt{\frac{b^7 - a^7}{7(b - a)}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_2(x)$ — собственная функция ядра, соответствующая характеристическому значению λ_2.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

21. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b (x^3 - t^3)y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}(a^4-b^4)^2 - \frac{1}{7}(a^7-b^7)(b-a)}}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x^3 + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 + \lambda\left(\frac{1}{4}f_1\Delta_4 - f_2\Delta_1\right)}{\lambda^2\left(\frac{1}{7}\Delta_1\Delta_7 - \frac{1}{16}\Delta_4^2\right)+1}, \quad A_2 = \frac{-f_2 + \lambda\left(\frac{1}{4}f_2\Delta_4 - \frac{1}{7}f_1\Delta_7\right)}{\lambda^2\left(\frac{1}{7}\Delta_1\Delta_7 - \frac{1}{16}\Delta_4^2\right)+1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b x^3 f(x)\,dx, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = x^3 + \frac{4 - \lambda_1(b^4 - a^4)}{4\lambda_1(b-a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

22. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b (Ax^3 + Bt^3)y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{1}{4}(A+B)\Delta_4 \pm \sqrt{\frac{1}{16}(A-B)^2\Delta_4^2 + \frac{4}{7}AB\Delta_1\Delta_7}}{2AB\left(\frac{1}{16}\Delta_4^2 - \frac{1}{7}\Delta_1\Delta_7\right)}, \qquad \Delta_n = b^n - a^n.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x^3 + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{Af_1 - AB\lambda\left(\frac{1}{4}f_1\Delta_4 - f_2\Delta_1\right)}{AB\lambda^2\left(\frac{1}{16}\Delta_4^2 - \frac{1}{7}\Delta_1\Delta_7\right) - \frac{1}{4}\lambda(A+B)\Delta_4 + 1},$$

$$A_2 = \frac{Bf_2 - AB\lambda\left(\frac{1}{4}f_2\Delta_4 - \frac{1}{7}f_1\Delta_7\right)}{AB\lambda^2\left(\frac{1}{16}\Delta_4^2 - \frac{1}{7}\Delta_1\Delta_7\right) - \frac{1}{4}\lambda(A+B)\Delta_4 + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b x^3 f(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = x^3 + \frac{4 - \lambda_1 A(b^4 - a^4)}{4\lambda_1 A(b-a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{8}{(A+B)(b^4 - a^4)}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x), \qquad y_*(x) = x^3 - \frac{(A-B)(b^4 - a^4)}{8A(b-a)}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*.

23. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (xt^2 - t^3) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $A = 0$, $B = 1$, $h(t) = t^2$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2 x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.8.

24. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (Bxt^2 + Ct^3) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.9 при $A = 0$, $h(t) = t^2$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2 x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.9.

25. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^2 t + Bxt^2) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = x^2$, $h(x) = x$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^2 + A_2 x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.17.

26. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^3 + Bxt^2) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x^3$, $h_1(t) = A$, $g_2(x) = x$, $h_2(t) = Bt^2$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^3 + A_2 x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

27. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^3 + Bx^2 t + Cx^2 + D) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = Ax^3 + Cx^2 + D$, $h_1(t) = 1$, $g_2(x) = x^2$, $h_2(t) = Bt$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1(Ax^3 + Cx^2 + D) + A_2 x^2],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

28. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b (Axt^2 + Bt^3 + Ct^2 + D)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x$, $h_1(t) = At^2$, $g_2(x) = 1$, $h_2(t) = Bt^3 + Ct^2 + D$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x + A_2),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

29. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b (x - t)^3 y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.19 при $g(x) = x$, $h(t) = -t$, $m = 3$.

30. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b (Ax + Bt)^3 y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.19 при $g(x) = Ax$, $h(t) = Bt$, $m = 3$.

4.1-4. Ядра уравнений в виде полиномов более высокой степени

31. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b (x^n + t^n)y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\Delta_n \pm \sqrt{\Delta_0 \Delta_{2n}}}, \qquad \text{где} \quad \Delta_n = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^n + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda(f_1 \Delta_n - f_2 \Delta_0)}{\lambda^2(\Delta_n^2 - \Delta_0 \Delta_{2n}) - 2\lambda\Delta_n + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda(f_2 \Delta_n - f_1 \Delta_{2n})}{\lambda^2(\Delta_n^2 - \Delta_0 \Delta_{2n}) - 2\lambda\Delta_n + 1},$$
$$f_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b x^n f(x)\,dx, \quad \Delta_n = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = x^n + \sqrt{\Delta_{2n}/\Delta_0},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_2(x), \qquad y_2(x) = x^n - \sqrt{\Delta_{2n}/\Delta_0},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_2(x)$ — собственная функция ядра, соответствующая характеристическому значению λ_2.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

32. $y(x) - \lambda \int_a^b (x^n - t^n) y(t)\, dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \pm\left[\frac{1}{(n+1)^2}(b^{n+1} - a^{n+1})^2 - \frac{1}{2n+1}(b^{2n+1} - a^{2n+1})(b-a)\right]^{-1/2}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^n + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 + \lambda(f_1\Delta_n - f_2\Delta_0)}{\lambda^2(\Delta_0\Delta_{2n} - \Delta_n^2) + 1}, \quad A_2 = \frac{-f_2 + \lambda(f_2\Delta_n - f_1\Delta_{2n})}{\lambda^2(\Delta_0\Delta_{2n} - \Delta_n^2) + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\, dx, \quad f_2 = \int_a^b x^n f(x)\, dx, \quad \Delta_n = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_1(x), \qquad y_1(x) = x^n + \frac{1 - \lambda_1\Delta_n}{\lambda_1\Delta_0},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

33. $y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^n + Bt^n) y(t)\, dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A+B)\Delta_n \pm \sqrt{(A-B)^2\Delta_n^2 + 4AB\Delta_0\Delta_{2n}}}{2AB(\Delta_n^2 - \Delta_0\Delta_{2n})}, \qquad \Delta_n = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^n + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{Af_1 - AB\lambda(f_1\Delta_n - f_2\Delta_0)}{AB\lambda^2(\Delta_n^2 - \Delta_0\Delta_{2n}) - (A+B)\lambda\Delta_n + 1},$$

$$A_2 = \frac{Bf_2 - AB\lambda(f_2\Delta_n - f_1\Delta_{2n})}{AB\lambda^2(\Delta_n^2 - \Delta_0\Delta_{2n}) - (A+B)\lambda\Delta_n + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\, dx, \quad f_2 = \int_a^b x^n f(x)\, dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_1(x), \qquad y_1(x) = x^n + \frac{1 - A\lambda_1\Delta_n}{A\lambda_1\Delta_0},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{2}{(A+B)\Delta_n}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x), \qquad y_*(x) = x^n - \frac{(A-B)\Delta_n}{2A\Delta_0}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*.

34. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (x-t)t^m y(t)\,dt = f(x), \qquad m = 1, 2, \ldots}$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $A = 0$, $B = 1$, $h(t) = t^m$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2 x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.8.

35. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (x-t)x^m y(t)\,dt = f(x), \qquad m = 1, 2, \ldots}$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $A = 0$, $B = 1$, $h(x) = x^m$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^{m+1} + A_2 x^m),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.10.

36. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^{m+1} + Bx^m t + Cx^m + D)y(t)\,dt = f(x), \qquad m = 1, 2, \ldots}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = Ax^{m+1} + Cx^m + D$, $h_1(t) = 1$, $g_2(x) = x^m$, $h_2(t) = Bt$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1(Ax^{m+1} + Cx^m + D) + A_2 x^m],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

37. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (Axt^m + Bt^{m+1} + Ct^m + D)y(t)\,dt = f(x), \qquad m = 1, 2, \ldots}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x$, $h_1(t) = At^m$, $g_2(x) = 1$, $h_2(t) = Bt^{m+1} + Ct^m + D$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x + A_2),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

38. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^n t^n + Bx^m t^m)y(t)\,dt = f(x), \qquad n, m = 1, 2, \ldots, \qquad n \neq m.}$

Частный случай уравнения 4.9.14 при $g(x) = x^n$, $h(t) = t^m$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^n + A_2 x^m),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.14.

39. $\boldsymbol{y(x)-\lambda\int_a^b (Ax^n t^m + Bx^m t^n)\,y(t)\,dt = f(x), \qquad n,m=1,2,\ldots, \qquad n\neq m.}$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = x^n$, $h(t) = t^m$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^n + A_2 x^m),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.17.

40. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b (x-t)^m y(t)\,dt = f(x), \qquad m = 1,2,\ldots}$

Частный случай уравнения 4.9.19 при $g(x) = x$, $h(t) = -t$.

41. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b (Ax+Bt)^m y(t)\,dt = f(x), \qquad m = 1,2,\ldots}$

Частный случай уравнения 4.9.19 при $g(x) = Ax$, $h(t) = Bt$.

42. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b |x-t|\,t^k y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.36 при $g(t) = At^k$. Решение интегрального уравнения сводится к задаче для обыкновенного дифференциального уравнения $y''_{xx} + 2Ax^k y = f''_{xx}(x)$, общее решение которого может быть выражено через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя (граничные условия указаны в 4.9.36).

43. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b |x-t|^{2n+1} y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 0,1,2,\ldots}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + A\int_a^x (x-t)^{2n+1} y(t)\,dt + A\int_x^b (t-x)^{2n+1} y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) k раз по x, имеем

$$\begin{gathered} y_x^{(k)}(x) + AB_k\int_a^x (x-t)^{2n+1-k} y(t)dt + (-1)^k AB_k\int_x^b (t-x)^{2n+1-k} y(t)dt = f_x^{(k)}(x), \\ B_k = (2n+1)(2n)\ldots(2n+2-k), \qquad k = 1,\,2,\,\ldots,\,2n+1. \end{gathered} \tag{2}$$

Дифференцируя (2) при $k = 2n+1$, для функции $y = y(x)$ получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y_x^{(2n+2)} + 2(2n+1)!\,Ay = f_x^{(2n+2)}(x). \tag{3}$$

Уравнение (3) должно удовлетворять граничным условиям, которые получаются в результате подстановки значения $x = a$ в равенства (1) и (2):

$$\begin{aligned} &y(a) + A\int_a^b (t-a)^{2n+1} y(t)\,dt = f(a), \\ &y_x^{(k)}(a) + (-1)^k AB_k\int_a^b (t-a)^{2n+1-k} y(t)\,dt = f_x^{(k)}(a), \quad k = 1,\,2,\,\ldots,\,2n+1. \end{aligned} \tag{4}$$

Эти условия можно преобразовать к более привычному виду, не содержащему интегралов. Для этого из уравнения (3) надо выразить y через $y_x^{(2n+2)}$ и $f_x^{(2n+2)}$ и подставить в (4), а затем проинтегрировать полученные выражения (достаточное число раз) по частям.

4.1-5. Ядра уравнений содержат рациональные функции

44. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{t}\right) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.2 при $g(x) = 1/x$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda\left(\frac{A_1}{x} + A_2\right),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.2.

45. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.3 при $g(x) = 1/x$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda\left(\frac{A_1}{x} + A_2\right),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.3.

46. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{t}\right) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.4 при $g(x) = 1/x$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda\left(\frac{A_1}{x} + A_2\right),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.4.

47. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \left(\frac{A}{x+\alpha} + \frac{B}{t+\beta}\right) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.5 при $g(x) = \dfrac{A}{x+\alpha}$, $h(t) = \dfrac{B}{t+\beta}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda\left(A_1\frac{A}{x+\alpha} + A_2\right),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.5.

48. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \left(\frac{x}{t} - \frac{t}{x}\right) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.16 при $g(x) = x$, $h(t) = 1/t$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda\left(A_1 x + \frac{A_2}{x}\right),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.16.

49. $\displaystyle y(x)-\lambda\int_a^b\left(\frac{Ax}{t}+\frac{Bt}{x}\right)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x)=x$, $h(t)=1/t$.
Решение:

$$y(x)=f(x)+\lambda\left(A_1x+\frac{A_2}{x}\right),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.17.

50. $\displaystyle y(x)-\lambda\int_a^b\left(A\frac{x+\alpha}{t+\beta}+B\frac{t+\alpha}{x+\beta}\right)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x)=x+\alpha$, $h(t)=\dfrac{1}{t+\beta}$.

Решение:

$$y(x)=f(x)+\lambda\left[A_1(x+\alpha)+\frac{A_2}{x+\beta}\right],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.17.

51. $\displaystyle y(x)-\lambda\int_a^b\left[A\frac{(x+\alpha)^n}{(t+\beta)^m}+B\frac{(t+\alpha)^n}{(x+\beta)^m}\right]y(t)\,dt=f(x),\quad n,m=0,1,2,\dots$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x)=(x+\alpha)^n$, $h(t)=(t+\beta)^{-m}$.
Решение:

$$y(x)=f(x)+\lambda\left[A_1(x+\alpha)^n+\frac{A_2}{(x+\beta)^m}\right],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.17.

52. $\displaystyle y(x)-\lambda\int_1^\infty\frac{y(t)}{x+t}\,dt=f(x),\qquad 1\leqslant x<\infty,\quad -\infty<\pi\lambda<1.$

Решение:

$$y(x)=\int_0^\infty\frac{\tau\operatorname{sh}(\pi\tau)\,F(\tau)}{\operatorname{ch}(\pi\tau)-\pi\lambda}P_{-\frac12+i\tau}(x)\,d\tau,$$
$$F(\tau)=\int_1^\infty f(x)P_{-\frac12+i\tau}(x)\,dx,$$

где $P_\nu(x)=F\bigl(-\nu,\nu+1,1;\,\frac12(1-x)\bigr)$ — сферическая функция Лежандра первого рода, для определения которой можно использовать интегральное представление:

$$P_{-\frac12+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^\alpha\frac{\cos(\tau s)\,ds}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s)}}\qquad(\alpha\geqslant0).$$

⦿ *Литература*: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 90)

53. $\displaystyle (x^2+b^2)y(x)=\frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{a^3y(t)}{a^2+(x-t)^2}\,dt.$

Это уравнение встречается в атомной и ядерной физике.
Решение ищем в виде ряда

$$y(x)=\sum_{m=0}^\infty\frac{A_mx}{x^2+(am+b)^2},\tag{1}$$

коэффициенты которого A_m удовлетворяют следующим уравнениям:

$$mA_m\left(\frac{m+2b}{a}\right)+\lambda A_{m-1}=0,\qquad \sum_{m=0}^{\infty}A_m=0. \tag{2}$$

Разрешая первое из этих уравнений, выражая A_m через A_0 (A_0 можно выбрать произвольно) и подставляя результат во второе уравнение (2), после сокращения на A_0 получим

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^m}{m!}\frac{1}{(1+2b/a)(2+2b/a)\dots(m+2b/a)}=0. \tag{3}$$

Из определения функций Бесселя первого рода следует, что уравнение (3) можно записать в виде

$$\lambda^{-b/a}J_{2b/a}(2\sqrt{\lambda})=0. \tag{4}$$

В задачах такого типа обычно считается, что величины a и λ известны и требуется определить величину b, которая пропорциональна энергии системы. Эта величина определяется по таблицам нулей функций Бесселя. В некоторых случаях величины b и a считаются заданными, а ищется величина λ.

⦿ *Литература*: И. Снеддон (1955).

4.1-6. Ядра уравнений содержат произвольные степени

54. $\boldsymbol{y(x)-\lambda\int_a^b(x-t)t^{\mu}y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $A=0$, $B=1$, $h(t)=t^{\mu}$.

Решение:

$$y(x)=f(x)+\lambda(A_1+A_2x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.8.

55. $\boldsymbol{y(x)-\lambda\int_a^b(x-t)x^{\nu}y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $A=0$, $B=1$, $h(x)=x^{\nu}$.

Решение:

$$y(x)=f(x)+\lambda(E_1x^{\nu+1}+E_2x^{\nu}),$$

где E_1 и E_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.10.

56. $\boldsymbol{y(x)-\lambda\int_a^b(x^{\mu}-t^{\mu})y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.3 при $g(x)=x^{\mu}$.

Решение:

$$y(x)=f(x)+\lambda(A_1x^{\mu}+A_2),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.3.

57. $\boldsymbol{y(x)-\lambda\int_a^b(Ax^{\nu}+Bt^{\nu})t^{\mu}y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.6 при $g(x)=x^{\nu}$, $h(t)=t^{\mu}$.

Решение:

$$y(x)=f(x)+\lambda(A_1x^{\nu}+A_2),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.6.

58. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (Dx^\nu + Et^\mu) x^\gamma y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x^{\nu+\gamma}$, $h_1(t) = D$, $g_2(x) = x^\gamma$, $h_2(t) = Et^\mu$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^{\nu+\gamma} + A_2 x^\gamma),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

59. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^\nu t^\mu + Bx^\gamma t^\delta) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x^\nu$, $h_1(t) = At^\mu$, $g_2(x) = x^\gamma$, $h_2(t) = Bt^\delta$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^\nu + A_2 x^\gamma),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

60. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (A + Bxt^\mu + Ct^{\mu+1}) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.9 при $h(t) = t^\mu$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2 x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.9.

61. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (At^\alpha + Bx^\beta t^\mu + Ct^{\mu+\gamma}) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = 1$, $h_1(t) = At^\alpha + Ct^{\mu+\gamma}$, $g_2(x) = x^\beta$, $h_2(t) = Bt^\mu$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2 x^\beta),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

62. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^\alpha t^\gamma + Bx^\beta t^\gamma + Cx^\mu t^\nu) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta$, $h_1(t) = t^\gamma$, $g_2(x) = x^\mu$, $h_2(t) = Ct^\nu$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1(Ax^\alpha + Bx^\beta) + A_2 x^\mu],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

63. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \left[A\frac{(x+p_1)^\beta}{(t+q_1)^\gamma} + B\frac{(x+p_2)^\mu}{(t+q_2)^\delta} \right] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = (x+p_1)^\beta$, $h_1(t) = A(t+q_1)^{-\gamma}$, $g_2(x) = (x+p_2)^\mu$, $h_2(t) = B(t+q_2)^{-\delta}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda\bigl[A_1(x+p_1)^\beta + A_2(x+p_2)^\mu\bigr],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

64. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b \Big(A\frac{x^\mu + a}{t^\nu + b} + B\frac{x^\gamma + c}{t^\delta + d}\Big) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x^\mu + a$, $h_1(t) = \dfrac{A}{t^\nu + b}$, $g_2(x) = x^\gamma + c$, $h_2(t) = \dfrac{B}{t^\delta + d}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1(x^\mu + a) + A_2(x^\gamma + c)],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

4.1-7. Сингулярные уравнения

В этом разделе сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

65. $\boldsymbol{Ay(x) + \frac{B}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{y(t)\,dt}{t - x} = f(x), \qquad -1 < x < 1.}$

Не умаляя общности, можно считать, что $A^2 + B^2 = 1$.

1°. Решение, ограниченное на обоих концах отрезка:

$$y(x) = Af(x) - \frac{B}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{g(x)}{g(t)}\,\frac{f(t)\,dt}{t - x}, \qquad g(x) = (1 + x)^\alpha(1 - x)^{1-\alpha}, \tag{1}$$

где α — решение тригонометрического уравнения

$$A + B\operatorname{ctg}(\pi\alpha) = 0 \tag{2}$$

на интервале $0 < \alpha < 1$. Решение $y(x)$ существует тогда и только тогда, когда $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{g(t)}\,dt = 0$.

2°. Решение, ограниченное при $x = 1$ и неограниченное при $x = -1$:

$$y(x) = Af(x) - \frac{B}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{g(x)}{g(t)}\,\frac{f(t)\,dt}{t - x}, \qquad g(x) = (1 + x)^\alpha(1 - x)^{-\alpha}, \tag{3}$$

где α — решение тригонометрического уравнения (2) на интервале $-1 < \alpha < 0$.

3°. Решение, неограниченное на обоих концах отрезка:

$$y(x) = Af(x) - \frac{B}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{g(x)}{g(t)}\,\frac{f(t)\,dt}{t - x} + Cg(x), \qquad g(x) = (1 + x)^\alpha(1 - x)^{-1-\alpha}, \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная, α — решение тригонометрического уравнения (2) на интервале $-1 < \alpha < 0$.

⦿ *Литература*: И. К. Лифанов (1995).

66. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_0^1 \Big(\frac{1}{t - x} - \frac{1}{x + t - 2xt}\Big) y(t)\,dt = f(x), \quad 0 < x < 1.}$

Уравнение Трикоми.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2\pi^2}\left[f(x) + \int_0^1 \frac{t^\alpha(1 - x)^\alpha}{x^\alpha(1 - t)^\alpha}\Big(\frac{1}{t - x} - \frac{1}{x + t - 2xt}\Big) f(t)\,dt\right] + \frac{C(1 - x)^\beta}{x^{1+\beta}},$$

$$\alpha = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(\lambda\pi) \ \ (-1 < \alpha < 1), \quad \operatorname{tg}\frac{\beta\pi}{2} = \lambda\pi \ \ (-2 < \beta < 0),$$

где C — произвольная постоянная.

⦿ *Литература*: Ф. Трикоми (1960), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 206).

4.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции

4.2-1. Ядра уравнений содержат экспоненциальные функции

1. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (e^{\beta x} + e^{\beta t}) y(t)\, dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta}{e^{\beta b} - e^{\beta a} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\beta(b-a)(e^{2\beta b} - e^{2\beta a})}}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 e^{\beta x} + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda\big[f_1\Delta_\beta - (b-a)f_2\big]}{\lambda^2\big[\Delta_\beta^2 - (b-a)\Delta_{2\beta}\big] - 2\lambda\Delta_\beta + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda(f_2\Delta_\beta - f_1\Delta_{2\beta})}{\lambda^2\big[\Delta_\beta^2 - (b-a)\Delta_{2\beta}\big] - 2\lambda\Delta_\beta + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\, dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x) e^{\beta x}\, dx, \quad \Delta_\beta = \frac{1}{\beta}(e^{\beta b} - e^{\beta a}).$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_1(x), \qquad y_1(x) = e^{\beta x} + \sqrt{\frac{e^{2\beta b} - e^{2\beta a}}{2\beta(b-a)}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_2(x), \qquad y_2(x) = e^{\beta x} - \sqrt{\frac{e^{2\beta b} - e^{2\beta a}}{2\beta(b-a)}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_2(x)$ — собственная функция ядра, соответствующая характеристическому значению λ_2.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

2. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (e^{\beta x} - e^{\beta t}) y(t)\, dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{\beta}{\sqrt{(e^{\beta b} - e^{\beta a})^2 - \frac{1}{2}\beta(b-a)(e^{2\beta b} - e^{2\beta a})}}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 e^{\beta x} + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 + \lambda\big[f_1\Delta_\beta - (b-a)f_2\big]}{\lambda^2\big[(b-a)\Delta_{2\beta} - \Delta_\beta^2\big] + 1}, \quad A_2 = \frac{-f_2 + \lambda(f_2\Delta_\beta - f_1\Delta_{2\beta})}{\lambda^2\big[(b-a)\Delta_{2\beta} - \Delta_\beta^2\big] + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\, dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x) e^{\beta x}\, dx, \quad \Delta_\beta = \frac{1}{\beta}(e^{\beta b} - e^{\beta a}).$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = e^{\beta x} + \frac{1 - \lambda_1 \Delta_\beta}{\lambda_1 (b-a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

3. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (Ae^{\beta x} + Be^{\beta t}) y(t)\, dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A+B)\Delta_\beta \pm \sqrt{(A-B)^2 \Delta_\beta^2 + 4AB(b-a)\Delta_{2\beta}}}{2AB\bigl[\Delta_\beta^2 - (b-a)\Delta_{2\beta}\bigr]}, \qquad \Delta_\beta = \frac{1}{\beta}(e^{\beta b} - e^{\beta a}).$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 e^{\beta x} + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{Af_1 - AB\lambda\bigl[f_1 \Delta_\beta - (b-a) f_2\bigr]}{AB\lambda^2\bigl[\Delta_\beta^2 - (b-a)\Delta_{2\beta}\bigr] - (A+B)\lambda\Delta_\beta + 1},$$

$$A_2 = \frac{Bf_2 - AB\lambda(f_2 \Delta_\beta - f_1 \Delta_{2\beta})}{AB\lambda^2\bigl[\Delta_\beta^2 - (b-a)\Delta_{2\beta}\bigr] - (A+B)\lambda\Delta_\beta + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\, dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x) e^{\beta x}\, dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = e^{\beta x} + \frac{1 - A\lambda_1 \Delta_\beta}{A(b-a)\lambda_1},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{2}{(A+B)\Delta_\beta}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x), \qquad y_*(x) = e^{\beta x} - \frac{(A-B)\Delta_\beta}{2A(b-a)}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*.

4. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \bigl[Ae^{\beta(x-t)} + B\bigr] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\beta x}$, $h_1(t) = Ae^{-\beta t}$, $g_2(x) = 1$, $h_2(t) = B$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 e^{\beta x} + A_2),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

5. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \left[Ae^{\beta x+\mu t} + Be^{(\beta+\mu)t}\right] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.6 при $g(x) = e^{\beta x}$, $h(t) = e^{\mu t}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 e^{\beta x} + A_2),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.6.

6. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \left[Ae^{\alpha(x+t)} + Be^{\beta(x+t)}\right] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.14 при $g(x) = e^{\alpha x}$, $h(t) = e^{\beta t}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{\beta x}),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.14.

7. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (Ae^{\alpha x+\beta t} + Be^{\beta x+\alpha t}) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = e^{\alpha x}$, $h(t) = e^{\beta t}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{\beta x}),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.17.

8. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \left[De^{(\gamma+\mu)x} + Ee^{\nu t+\mu x}\right] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{(\gamma+\mu)x}$, $h_1(t) = D$, $g_2(x) = e^{\mu x}$, $h_2(t) = Ee^{\nu t}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 e^{(\gamma+\mu)x} + A_2 e^{\mu x}],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

9. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b (Ae^{\alpha x+\beta t} + Be^{\gamma x+\delta t}) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\alpha x}$, $h_1(t) = Ae^{\beta t}$, $g_2(x) = e^{\gamma x}$, $h_2(t) = Be^{\delta t}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{\gamma x}),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

10. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n A_k e^{\gamma_k(x-t)}\right] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.20 при $g_k(x) = e^{\gamma_k x}$, $h_k(t) = A_k e^{-\gamma_k t}$.

11. $\boldsymbol{y(x) - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-|x-t|} y(t)\,dt = Ae^{\mu x}, \qquad 0 < \mu < 1.}$

Решение:

$$y(x) = C(1+x) + A\mu^{-2}\left[(\mu^2 - 1)e^{\mu x} - \mu + 1\right],$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 307).

12. $\boldsymbol{y(x)+\lambda\int_0^\infty e^{-|x-t|}y(t)\,dt=f(x).}$

Решение:

$$y(x)=f(x)-\frac{\lambda}{\sqrt{1+2\lambda}}\int_0^\infty \exp\bigl(-\sqrt{1+2\lambda}\,|x-t|\bigr)f(t)\,dt+$$
$$+\left(1-\frac{\lambda+1}{\sqrt{1+2\lambda}}\right)\int_0^\infty \exp\bigl[-\sqrt{1+2\lambda}\,(x+t)\bigr]f(t)\,dt,$$

где $\lambda>-\frac{1}{2}$.

⊙ *Литература*: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 88).

13. $\boldsymbol{y(x)-\lambda\int_{-\infty}^\infty e^{-|x-t|}y(t)\,dt=0,\qquad \lambda>0.}$

Уравнение Лалеско — Пикара.

Решение:

$$y(x)=\begin{cases} C_1\exp\bigl(x\sqrt{1-2\lambda}\,\bigr)+C_2\exp\bigl(-x\sqrt{1-2\lambda}\,\bigr) & \text{при}\ \ 0<\lambda<\frac{1}{2},\\ C_1+C_2x & \text{при}\ \ \lambda=\frac{1}{2},\\ C_1\cos\bigl(x\sqrt{2\lambda-1}\,\bigr)+C_2\sin\bigl(x\sqrt{2\lambda-1}\,\bigr) & \text{при}\ \ \lambda>\frac{1}{2},\end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 138).

14. $\boldsymbol{y(x)+\lambda\int_{-\infty}^\infty e^{-|x-t|}y(t)\,dt=f(x).}$

1°. Решение при $\lambda>-\frac{1}{2}$:

$$y(x)=f(x)-\frac{\lambda}{\sqrt{1+2\lambda}}\int_{-\infty}^\infty \exp\bigl(-\sqrt{1+2\lambda}\,|x-t|\bigr)f(t)\,dt.$$

2°. При условии $\lambda\leqslant-\frac{1}{2}$ для разрешимости уравнения необходимо выполнение условий

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos(ax)\,dx=0,\qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\sin(ax)\,dx=0,$$

где $a=\sqrt{-1-2\lambda}$. В этом случае решение имеет вид

$$y(x)=f(x)-\frac{a^2+1}{2a}\int_0^\infty \sin(at)f(x+t)\,dt,\qquad (-\infty<x<\infty).$$

Если рассматривать решения, не принадлежащие $L_2(-\infty,+\infty)$, то однородное уравнение при $f=0$ имеет нетривиальное решение. В этом случае общее решение соответствующего неоднородного уравнения при $\lambda\leqslant-\frac{1}{2}$ имеет вид

$$y(x)=C_1\sin(ax)+C_2\cos(ax)+f(x)-\frac{a^2+1}{4a}\int_{-\infty}^\infty \sin(a|x-t|)f(t)\,dt.$$

⊙ *Литература*: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 48).

15. $\boldsymbol{y(x)+A\int_a^b e^{\lambda|x-t|}y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.37 при $g(t)=A$.

1°. Функция $y = y(x)$ удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + \lambda(2A - \lambda)y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \tag{1}$$

Граничные условия для уравнения (1) имеют следующий вид (см. 4.9.37):

$$\begin{gathered} y'_x(a) + \lambda y(a) = f'_x(a) + \lambda f(a), \\ y'_x(b) - \lambda y(b) = f'_x(b) - \lambda f(b). \end{gathered} \tag{2}$$

Уравнение (1) вместе с граничными условиями (2) описывает решение исходного интегрального уравнения.

2°. При $\lambda(2A - \lambda) < 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$\begin{gathered} y(x) = C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k} \int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)]\, f(t)\, dt, \\ k = \sqrt{\lambda(\lambda - 2A)}, \end{gathered} \tag{3}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $\lambda(2A - \lambda) > 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$\begin{gathered} y(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k} \int_a^x \sin[k(x-t)]\, f(t)\, dt, \\ k = \sqrt{\lambda(2A - \lambda)}. \end{gathered} \tag{4}$$

При $\lambda = 2A$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 + C_2 x + f(x) - 4A^2 \int_a^x (x-t) f(t)\, dt. \tag{5}$$

Условия (2) позволяют найти постоянные интегрирования C_1, C_2 в решениях (3)–(5).

3°. В частном случае $a = 0$, $\lambda(2A - \lambda) > 0$ решение интегрального уравнения определяется по формуле (4), где

$$C_1 = \frac{A(kI_\mathrm{c} - \lambda I_\mathrm{s})}{(\lambda - A)\sin\mu - k\cos\mu}, \qquad C_2 = -\frac{\lambda}{k}\,\frac{A(kI_\mathrm{c} - \lambda I_\mathrm{s})}{(\lambda - A)\sin\mu - k\cos\mu},$$

$$k = \sqrt{\lambda(2A - \lambda)}, \quad \mu = bk, \quad I_\mathrm{s} = \int_0^b \sin[k(b-t)] f(t)\, dt, \quad I_\mathrm{c} = \int_0^b \cos[k(b-t)] f(t)\, dt.$$

16. $y(x) + \displaystyle\int_a^b \Big[\sum_{k=1}^n A_k \exp(\lambda_k |x - t|)\Big] y(t)\, dt = f(x), \qquad -\infty < a < b < \infty.$

1°. Раскроем модуль в одном из слагаемых в подынтегральном выражении:

$$I_k(x) = \int_a^b \exp(\lambda_k |x-t|) y(t)\, dt = \int_a^x \exp[\lambda_k(x-t)] y(t)\, dt + \int_x^b \exp[\lambda_k(t-x)] y(t)\, dt. \tag{1}$$

Продифференцируем (1) дважды по x. В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$\begin{aligned} I'_k &= \lambda_k \int_a^x \exp[\lambda_k(x-t)] y(t)\, dt - \lambda_k \int_x^b \exp[\lambda_k(t-x)] y(t)\, dt, \\ I''_k &= 2\lambda_k y(x) + \lambda_k^2 \int_a^x \exp[\lambda_k(x-t)] y(t)\, dt + \lambda_k^2 \int_x^b \exp[\lambda_k(t-x)] y(t)\, dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I''_k и I_k:

$$I''_k = 2\lambda_k y(x) + \lambda_k^2 I_k, \qquad I_k = I_k(x). \tag{3}$$

2°. Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$y(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k I_k = f(x). \qquad (4)$$

Дифференцируя (4) дважды по x, с учетом равенств (3) имеем

$$y''_{xx}(x) + \sigma_n y(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k \lambda_k^2 I_k = f''_{xx}(x), \qquad \sigma_n = 2\sum_{k=1}^{n} A_k \lambda_k. \qquad (5)$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$y''_{xx}(x) + (\sigma_n - \lambda_n^2) y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (\lambda_k^2 - \lambda_n^2) I_k = f''_{xx}(x) - \lambda_n^2 f(x). \qquad (6)$$

Если продифференцировать равенство (6) дважды по x, а затем исключить интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор четвертого порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum\limits_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, $\ldots$, придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2n$.

3°. Граничные условия для функции $y(x)$ находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования. (Эти условия можно найти, подставляя значения $x = a$ и $x = b$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью двукратного дифференцирования.)

4.2-2. Ядра уравнений содержат экспоненциальные и степенные функции

17. $\displaystyle y(x) - \lambda \int_a^b (x - t) e^{\gamma t} y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $A = 0$, $B = 1$, $h(t) = e^{\gamma t}$.

18. $\displaystyle y(x) - \lambda \int_a^b (x - t) e^{\gamma x} y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $A = 0$, $B = 1$, $h(x) = e^{\gamma x}$.

19. $\displaystyle y(x) - \lambda \int_a^b (x - t) e^{\gamma x + \mu t} y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x e^{\gamma x}$, $h_1(t) = e^{\mu t}$, $g_2(x) = e^{\gamma x}$, $h_2(t) = -t e^{\mu t}$.

20. $\displaystyle y(x) - \lambda \int_a^b [A + (Bx + Ct) e^{\gamma x}] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.11 при $h(x) = e^{\gamma x}$.

21. $\displaystyle y(x) - \lambda \int_0^b (x^2 + t^2) e^{\gamma(x+t)} y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.15 при $g(x) = x^2 e^{\gamma x}$, $h(t) = e^{\gamma t}$.

22. $y(x) - \lambda \int_0^b (x^2 - t^2) e^{\gamma(x-t)} y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x^2 e^{\gamma x}$, $h_1(t) = e^{-\gamma t}$, $g_2(x) = e^{\gamma x}$, $h_2(t) = -t^2 e^{-\gamma t}$.

23. $y(x) - \lambda \int_0^b (Ax^n + Bt^n) e^{\alpha x + \beta t} y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 2, 3, \ldots$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x^n e^{\alpha x}$, $h_1(t) = Ae^{\beta t}$, $g_2(x) = e^{\alpha x}$, $h_2(t) = Bt^n e^{\beta t}$.

24. $y(x) - \lambda \int_a^b \Bigl[\sum_{k=1}^n A_k t^{\nu_k} e^{\alpha_k x + \beta_k t}\Bigr] y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 2, 3, \ldots$

Частный случай уравнения 4.9.20 при $g_k(x) = e^{\alpha_k x}$, $h_k(t) = A_k t^{\nu_k} e^{\beta_k t}$.

25. $y(x) - \lambda \int_a^b \Bigl[\sum_{k=1}^n A_k x^{\nu_k} e^{\alpha_k x + \beta_k t}\Bigr] y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 2, 3, \ldots$

Частный случай уравнения 4.9.20 при $g_k(x) = A_k x^{\nu_k} e^{\alpha_k x}$, $h_k(t) = e^{\beta_k t}$.

26. $y(x) - \lambda \int_a^b (x - t)^n e^{\gamma(x-t)} y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 2, 3, \ldots$

Частный случай уравнения 4.9.20.

27. $y(x) - \lambda \int_a^b (x - t)^n e^{\alpha x + \beta t} y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 2, 3, \ldots$

Частный случай уравнения 4.9.20.

28. $y(x) - \lambda \int_a^b (Ax + Bt)^n e^{\alpha x + \beta t} y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 2, 3, \ldots$

Частный случай уравнения 4.9.20.

29. $y(x) + A \int_a^b t e^{\lambda |x-t|} y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.37 при $g(t) = At$. Решение интегрального уравнения может быть выражено через функции Бесселя (или модифицированные функции Бесселя) порядка 1/3.

30. $y(x) + \int_0^\infty (a + b|x - t|) \exp(-|x - t|) y(t)\,dt = f(x).$

Пусть биквадратный полином $P(k) = k^4 + 2(a - b + 1)k^2 + 2a + 2b + 1$ не имеет вещественных корней, а $k = \alpha + i\beta$ — корень уравнения $P(k) = 0$, удовлетворяющий условиям $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Решение в этом случае имеет вид

$$
\begin{aligned}
y(x) = f(x) &+ \rho \int_0^\infty \exp(-\beta|x - t|) \cos(\theta + \alpha|x - t|) f(t)\,dt + \\
&+ \frac{[\alpha + (\beta - 1)^2]^2}{4\alpha^2\beta} \int_0^\infty \exp[-\beta(x + t)] \cos[\alpha(x - t)] f(t)\,dt + \\
&+ \frac{R}{4\alpha^2} \int_0^\infty \exp[-\beta(x + t)] \cos[\psi + \alpha(x + t)] f(t)\,dt,
\end{aligned}
$$

где параметры ρ, θ, R, ψ определяются из системы алгебраических уравнений, которая получается после отделения действительных и мнимых частей в выражениях

$$\rho e^{i\theta}=\frac{\mu}{\beta-i\alpha},\qquad Re^{i\psi}=\frac{(\beta-1-i\alpha)^4}{8\alpha^2(\beta-i\alpha)}.$$

⊙ *Литература*: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 56–58).

4.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции

4.3-1. Ядра уравнений содержат гиперболический косинус

1. $\boldsymbol{y(x)-\lambda\int_a^b \operatorname{ch}(\beta x)y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x)=\operatorname{ch}(\beta x)$, $h(t)=1$.

2. $\boldsymbol{y(x)-\lambda\int_a^b \operatorname{ch}(\beta t)y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x)=1$, $h(t)=\operatorname{ch}(\beta t)$.

3. $\boldsymbol{y(x)-\lambda\int_a^b \operatorname{ch}[\beta(x-t)]y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.13 при $g(x)=\operatorname{ch}(\beta x)$, $h(t)=\operatorname{sh}(\beta t)$.
Решение:

$$y(x)=f(x)+\lambda\bigl[A_1\operatorname{ch}(\beta x)+A_2\operatorname{sh}(\beta x)\bigr],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.13.

4. $\boldsymbol{y(x)-\lambda\int_a^b \operatorname{ch}[\beta(x+t)]y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.12 при $g(x)=\operatorname{ch}(\beta x)$, $h(t)=\operatorname{sh}(\beta t)$.
Решение:

$$y(x)=f(x)+\lambda\bigl[A_1\operatorname{ch}(\beta x)+A_2\operatorname{sh}(\beta x)\bigr],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.12.

5. $\boldsymbol{y(x)-\lambda\int_a^b\Bigl\{\sum_{k=1}^n A_k\operatorname{ch}[\beta_k(x-t)]\Bigr\}y(t)\,dt=f(x),\qquad n=1,2,\dots}$

Частный случай уравнения 4.9.20.

6. $\boldsymbol{y(x)-\lambda\int_a^b \frac{\operatorname{ch}(\beta x)}{\operatorname{ch}(\beta t)}y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x)=\operatorname{ch}(\beta x)$, $h(t)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}(\beta t)}$.

7. $\boldsymbol{y(x)-\lambda\int_a^b \frac{\operatorname{ch}(\beta t)}{\operatorname{ch}(\beta x)}y(t)\,dt=f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}(\beta x)}$, $h(t)=\operatorname{ch}(\beta t)$.

8. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta x) \operatorname{ch}^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ch}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{ch}^m(\mu t)$.

9. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b t^k \operatorname{ch}^m(\beta x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ch}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

10. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b x^k \operatorname{ch}^m(\beta t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{ch}^m(\beta t)$.

11. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t) \operatorname{ch}(\beta x)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$.

12. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t) \operatorname{ch}(\beta t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{ch}(\beta t)$.

13. $\boldsymbol{y(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)\, dt}{\operatorname{ch}[b(x-t)]} = f(x).}$

Решение при $b > \pi|\lambda|$:

$$y(x) = f(x) - \frac{2\lambda b}{\sqrt{b^2 - \pi^2\lambda^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}[2k(x-t)]}{\operatorname{sh}[2b(x-t)]} f(t)\, dt, \qquad k = \frac{b}{\pi} \arccos\left(\frac{\pi\lambda}{b}\right).$$

⊙ *Литература*: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 88).

4.3-2. Ядра уравнений содержат гиперболический синус

14. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}(\beta x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{sh}(\beta x)$, $h(t) = 1$.

15. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}(\beta t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \operatorname{sh}(\beta t)$.

16. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}[\beta(x-t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.16 при $g(x) = \operatorname{sh}(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{ch}(\beta t)$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda\bigl[A_1 \operatorname{sh}(\beta x) + A_2 \operatorname{ch}(\beta x)\bigr],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.16.

17. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}[\beta(x+t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.15 при $g(x) = \operatorname{sh}(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{ch}(\beta t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda\bigl[A_1 \operatorname{sh}(\beta x) + A_2 \operatorname{ch}(\beta x)\bigr],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.15.

18. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \Bigl\{ \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{sh}[\beta_k(x-t)] \Bigr\} y(t)\, dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots}$

Частный случай уравнения 4.9.20.

19. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{sh}(\beta x)}{\operatorname{sh}(\beta t)} y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{sh}(\beta x)$, $h(t) = \dfrac{1}{\operatorname{sh}(\beta t)}$.

20. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{sh}(\beta t)}{\operatorname{sh}(\beta x)} y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh}(\beta x)}$, $h(t) = \operatorname{sh}(\beta t)$.

21. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}^k(\beta x) \operatorname{sh}^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{sh}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^m(\mu t)$.

22. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b t^k \operatorname{sh}^m(\beta x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{sh}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

23. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b x^k \operatorname{sh}^m(\beta t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{sh}^m(\beta t)$.

24. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)\operatorname{sh}(\beta t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{sh}(\beta t)$.

25. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)\operatorname{sh}(\beta x)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{sh}(\beta x)$.

26. $\boldsymbol{y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.38 при $g(t) = A$.

1°. Функция $y = y(x)$ удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + \lambda(2A - \lambda)y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \tag{1}$$

Граничные условия для уравнения (1) имеют следующий вид (см. 4.9.38):

$$\begin{aligned} &\operatorname{sh}[\lambda(b-a)]\varphi'_x(b) - \lambda\operatorname{ch}[\lambda(b-a)]\varphi(b) = \lambda\varphi(a), \\ &\operatorname{sh}[\lambda(b-a)]\varphi'_x(a) + \lambda\operatorname{ch}[\lambda(b-a)]\varphi(a) = -\lambda\varphi(b), \end{aligned} \qquad \varphi(x) = y(x) - f(x). \tag{2}$$

Уравнение (1) вместе с граничными условиями (2) описывает решение исходного интегрального уравнения.

2°. При $\lambda(2A - \lambda) = -k^2 < 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k} \int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)]f(t)\,dt, \tag{3}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $\lambda(2A - \lambda) = k^2 > 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k} \int_a^x \sin[k(x-t)]f(t)\,dt. \tag{4}$$

При $\lambda = 2A$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 + C_2 x + f(x) - 4A^2 \int_a^x (x-t)f(t)\,dt. \tag{5}$$

Условия (2) позволяют найти постоянные интегрирования C_1, C_2 в решениях (3)–(5).

27. $\boldsymbol{y(x) + A\displaystyle\int_a^b t\operatorname{sh}(\lambda|x-t|)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.38 при $g(t) = At$. Решение интегрального уравнения может быть выражено через функции Бесселя (или модифицированные функции Бесселя) порядка 1/3.

28. $\boldsymbol{y(x) + A\displaystyle\int_a^b \operatorname{sh}^3(\lambda|x-t|)y(t)\,dt = f(x).}$

Используя формулу $\operatorname{sh}^3\beta = \frac{1}{4}\operatorname{sh}3\beta - \frac{3}{4}\operatorname{sh}\beta$, приходим к уравнению вида 4.3.29 при $n = 2$:

$$y(x) + \int_a^b \left[\tfrac{1}{4}A\operatorname{sh}(3\lambda|x-t|) - \tfrac{3}{4}A\operatorname{sh}(\lambda|x-t|)\right]y(t)\,dt = f(x).$$

29. $\boldsymbol{y(x) + \displaystyle\int_a^b \Bigg[\sum_{k=1}^n A_k \operatorname{sh}(\lambda_k|x-t|)\Bigg]y(t)\,dt = f(x), \qquad -\infty < a < b < \infty.}$

1°. Раскроем модуль в одном из слагаемых в подынтегральном выражении:

$$I_k(x) = \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda_k|x-t|)y(t)\,dt = \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt + \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda_k(t-x)]y(t)\,dt. \tag{1}$$

Продифференцируем (1) дважды по x. В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$\begin{aligned} I'_k &= \lambda_k \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt - \lambda_k \int_x^b \operatorname{ch}[\lambda_k(t-x)]y(t)\,dt, \\ I''_k &= 2\lambda_k y(x) + \lambda_k^2 \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt + \lambda_k^2 \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda_k(t-x)]y(t)\,dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I_k'' и I_k:

$$I_k'' = 2\lambda_k y(x) + \lambda_k^2 I_k, \qquad I_k = I_k(x). \tag{3}$$

2°. Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$y(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k I_k = f(x). \tag{4}$$

Дифференцируя (4) дважды по x, с учетом равенств (3) имеем

$$y_{xx}''(x) + \sigma_n y(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k \lambda_k^2 I_k = f_{xx}''(x), \qquad \sigma_n = 2\sum_{k=1}^{n} A_k \lambda_k. \tag{5}$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$y_{xx}''(x) + (\sigma_n - \lambda_n^2) y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (\lambda_k^2 - \lambda_n^2) I_k = f_{xx}''(x) - \lambda_n^2 f(x). \tag{6}$$

Если продифференцировать равенство (6) дважды по x, а затем исключить интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор четвертого порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum\limits_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, $\ldots$, придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2n$.

3°. Граничные условия для функции $y(x)$ находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования. (Эти условия можно найти, подставляя значения $x = a$ и $x = b$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью двукратного дифференцирования.)

4.3-3. Ядра уравнений содержат гиперболический тангенс

30. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}(\beta x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}(\beta x)$, $h(t) = 1$.

31. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}(\beta t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \operatorname{th}(\beta t)$.

32. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A \operatorname{th}(\beta x) + B \operatorname{th}(\beta t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.4 при $g(x) = \operatorname{th}(\beta x)$.

33. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{th}(\beta x)}{\operatorname{th}(\beta t)} y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}(\beta x)$, $h(t) = \dfrac{1}{\operatorname{th}(\beta t)}$.

34. $y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{th}(\beta t)}{\operatorname{th}(\beta x)} y(t)\,dt = f(x)$.

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{th}(\beta x)}$, $h(t) = \operatorname{th}(\beta t)$.

35. $y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}^k(\beta x)\operatorname{th}^m(\mu t) y(t)\,dt = f(x)$.

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{th}^m(\mu t)$.

36. $y(x) - \lambda \int_a^b t^k \operatorname{th}^m(\beta x) y(t)\,dt = f(x)$.

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

37. $y(x) - \lambda \int_a^b x^k \operatorname{th}^m(\beta t) y(t)\,dt = f(x)$.

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{th}^m(\beta t)$.

38. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)\operatorname{th}(\beta t)] y(t)\,dt = f(x)$.

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{th}(\beta t)$.

39. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)\operatorname{th}(\beta x)] y(t)\,dt = f(x)$.

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{th}(\beta x)$.

4.3-4. Ядра уравнений содержат гиперболический котангенс

40. $y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{cth}(\beta x) y(t)\,dt = f(x)$.

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{cth}(\beta x)$, $h(t) = 1$.

41. $y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{cth}(\beta t) y(t)\,dt = f(x)$.

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \operatorname{cth}(\beta t)$.

42. $y(x) - \lambda \int_a^b [A\operatorname{cth}(\beta x) + B\operatorname{cth}(\beta t)] y(t)\,dt = f(x)$.

Частный случай уравнения 4.9.4 при $g(x) = \operatorname{cth}(\beta x)$.

43. $y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{cth}(\beta x)}{\operatorname{cth}(\beta t)} y(t)\,dt = f(x)$.

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{cth}(\beta x)$, $h(t) = \dfrac{1}{\operatorname{cth}(\beta t)}$.

44. $y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{cth}(\beta t)}{\operatorname{cth}(\beta x)} y(t)\,dt = f(x)$.

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{cth}(\beta x)}$, $h(t) = \operatorname{cth}(\beta t)$.

45. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{cth}^k(\beta x) \operatorname{cth}^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{cth}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{cth}^m(\mu t)$.

46. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b t^k \operatorname{cth}^m(\beta x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{cth}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

47. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b x^k \operatorname{cth}^m(\beta t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{cth}^m(\beta t)$.

48. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t) \operatorname{cth}(\beta t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{cth}(\beta t)$.

49. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t) \operatorname{cth}(\beta x)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{cth}(\beta x)$.

4.3-5. Ядра уравнений содержат комбинации гиперболических функций

50. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta x) \operatorname{sh}^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ch}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^m(\mu t)$.

51. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A \operatorname{sh}(\alpha x) \operatorname{ch}(\beta t) + B \operatorname{sh}(\gamma x) \operatorname{ch}(\delta t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = \operatorname{sh}(\alpha x)$, $h_1(t) = A \operatorname{ch}(\beta t)$, $g_2(x) = \operatorname{sh}(\gamma x)$, $h_2(t) = B \operatorname{ch}(\delta t)$.

52. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}^k(\gamma x) \operatorname{cth}^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}^k(\gamma x)$, $h(t) = \operatorname{cth}^m(\mu t)$.

53. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A \operatorname{th}(\alpha x) \operatorname{cth}(\beta t) + B \operatorname{th}(\gamma x) \operatorname{cth}(\delta t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = \operatorname{th}(\alpha x)$, $h_1(t) = A \operatorname{cth}(\beta t)$, $g_2(x) = \operatorname{th}(\gamma x)$, $h_2(t) = B \operatorname{cth}(\delta t)$.

4.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции

4.4-1. Ядра уравнений содержат только логарифмические функции

1. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \ln(\gamma x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln(\gamma x)$, $h(t) = 1$.

2. $y(x) - \lambda \int_a^b \ln(\gamma t) y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \ln(\gamma t)$.

3. $y(x) - \lambda \int_a^b (\ln x - \ln t) y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.3 при $g(x) = \ln x$.

4. $y(x) - \lambda \int_a^b \dfrac{\ln(\gamma x)}{\ln(\gamma t)} y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln(\gamma x)$, $h(t) = \dfrac{1}{\ln(\gamma t)}$.

5. $y(x) - \lambda \int_a^b \dfrac{\ln(\gamma t)}{\ln(\gamma x)} y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \dfrac{1}{\ln(\gamma x)}$, $h(t) = \ln(\gamma t)$.

6. $y(x) - \lambda \int_a^b \ln^k(\gamma x) \ln^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^k(\gamma x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

4.4-2. Ядра уравнений содержат степенные и логарифмические функции

7. $y(x) - \lambda \int_a^b t^k \ln^m(\gamma x) y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\gamma x)$, $h(t) = t^k$.

8. $y(x) - \lambda \int_a^b x^k \ln^m(\gamma t) y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \ln^m(\gamma t)$.

9. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \ln(\gamma t)] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \ln(\gamma t)$.

10. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \ln(\gamma x)] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \ln(\gamma x)$.

11. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + (Bx + Ct) \ln(\gamma t)] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.9 при $h(t) = \ln(\gamma t)$.

12. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + (Bx + Ct) \ln(\gamma x)] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.11 при $h(x) = \ln(\gamma x)$.

13. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [At^n \ln^m(\beta x) + Bx^k \ln^l(\gamma t)] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = \ln^m(\beta x)$, $h_1(t) = At^n$, $g_2(x) = x^k$, $h_2(t) = B \ln^l(\gamma t)$.

4.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции

4.5-1. Ядра уравнений содержат косинус

1. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \cos(\beta x) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos(\beta x)$, $h(t) = 1$.

2. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \cos(\beta t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \cos(\beta t)$.

3. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \cos[\beta(x - t)] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.12 при $g(x) = \cos(\beta x)$, $h(t) = \sin(\beta t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda\bigl[A_1 \cos(\beta x) + A_2 \sin(\beta x)\bigr],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.12.

4. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \cos[\beta(x + t)] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.13 при $g(x) = \cos(\beta x)$, $h(t) = \sin(\beta t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda\bigl[A_1 \cos(\beta x) + A_2 \sin(\beta x)\bigr],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.13.

5. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_0^\infty \cos(xt) y(t)\,dt = 0.}$

Характеристические значения: $\lambda = \pm\sqrt{2/\pi}$. При этих значениях интегральное уравнение имеет бесконечное множество линейно независимых собственных функций.

Собственные функции при $\lambda = +\sqrt{2/\pi}$:

$$y_+(x) = f(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos(xt)\,dt, \tag{1}$$

где $f = f(x)$ — любая непрерывная функция, абсолютно интегрируемая на полуинтервале $[0, \infty)$.

Собственные функции при $\lambda = -\sqrt{2/\pi}$:

$$y_-(x) = f(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos(xt)\,dt, \tag{2}$$

где $f = f(x)$ — любая непрерывная функция, абсолютно интегрируемая на полуинтервале $[0, \infty)$.

Из формул (1), (2) при $f(x) = e^{-ax}$, в частности, получим

$$y_+(x) = e^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2} \qquad \text{при} \quad \lambda = +\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$
$$y_-(x) = e^{-ax} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2} \qquad \text{при} \quad \lambda = -\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

где $a > 0$ — любое.

⦿ *Литература*: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 139–141).

6. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_0^\infty \cos(xt)y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1-\frac{\pi}{2}\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\frac{\pi}{2}\lambda^2}\int_0^\infty \cos(xt)f(t)\,dt,$$

где $\lambda \neq \pm\sqrt{2/\pi}$.

⦿ *Литература*: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 148–150).

7. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b \Bigl\{\sum_{k=1}^{n} A_k \cos[\beta_k(x-t)]\Bigr\}y(t)\,dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \dots}$

Это уравнение сводится к частному случаю уравнения 4.9.20. Следует использовать формулу $\cos[\beta(x-t)] = \cos(\beta x)\cos(\beta t) + \sin(\beta x)\sin(\beta t)$.

8. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\beta t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos(\beta x)$, $h(t) = \dfrac{1}{\cos(\beta t)}$.

9. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b \frac{\cos(\beta t)}{\cos(\beta x)}y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \dfrac{1}{\cos(\beta x)}$, $h(t) = \cos(\beta t)$.

10. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b \cos^k(\beta x)\cos^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos^k(\beta x)$, $h(t) = \cos^m(\mu t)$.

11. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b t^k\cos^m(\beta x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

12. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b x^k\cos^m(\beta t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \cos^m(\beta t)$.

13. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)\cos(\beta x)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \cos(\beta x)$.

14. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)\cos(\beta t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \cos(\beta t)$.

4.5-2. Ядра уравнений содержат синус

15. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \sin(\beta x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin(\beta x)$, $h(t) = 1$.

16. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \sin(\beta t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \sin(\beta t)$.

17. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \sin[\beta(x-t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.16 при $g(x) = \sin(\beta x)$, $h(t) = \cos(\beta t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda\bigl[A_1 \sin(\beta x) + A_2 \cos(\beta x)\bigr],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.16.

18. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \sin[\beta(x+t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.15 при $g(x) = \sin(\beta x)$, $h(t) = \cos(\beta t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda\bigl[A_1 \sin(\beta x) + A_2 \cos(\beta x)\bigr],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.15.

19. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_0^\infty \sin(xt)y(t)\,dt = 0.}$

Характеристические значения: $\lambda = \pm\sqrt{2/\pi}$. При этих значениях интегральное уравнение имеет бесконечное множество линейно независимых собственных функций.

Собственные функции при $\lambda = +\sqrt{2/\pi}$:

$$y_+(x) = f(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t)\sin(xt)\,dt,$$

где $f = f(x)$ — любая непрерывная функция, абсолютно интегрируемая на полуинтервале $[0, \infty)$.

Собственные функции при $\lambda = -\sqrt{2/\pi}$:

$$y_-(x) = f(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t)\sin(xt)\,dt,$$

где $f = f(x)$ — любая непрерывная функция, абсолютно интегрируемая на полуинтервале $[0, \infty)$.

⊙ *Литература*: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 141).

20. $y(x) - \lambda \int_0^\infty \sin(xt) y(t)\, dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} + \frac{\lambda}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} \int_0^\infty \sin(xt) f(t)\, dt,$$

где $\lambda \neq \pm\sqrt{2/\pi}$.

⊙ *Литература*: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 150), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 88).

21. $y(x) - \lambda \int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \sin[\beta_k (x - t)] \right\} y(t)\, dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$

Это уравнение сводится к частному случаю уравнения 4.9.20. Следует использовать формулу $\sin[\beta(x-t)] = \sin(\beta x)\cos(\beta t) - \sin(\beta t)\cos(\beta x)$.

22. $y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\sin(\beta x)}{\sin(\beta t)} y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin(\beta x)$, $h(t) = \dfrac{1}{\sin(\beta t)}$.

23. $y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\sin(\beta t)}{\sin(\beta x)} y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \dfrac{1}{\sin(\beta x)}$, $h(t) = \sin(\beta t)$.

24. $y(x) - \lambda \int_a^b \sin^k(\beta x) \sin^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin^k(\beta x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

25. $y(x) - \lambda \int_a^b t^k \sin^m(\beta x) y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

26. $y(x) - \lambda \int_a^b x^k \sin^m(\beta t) y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \sin^m(\beta t)$.

27. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t)\sin(\beta t)] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \sin(\beta t)$.

28. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t)\sin(\beta x)] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \sin(\beta x)$.

29. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \sin(\lambda|x-t|)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.39 при $g(t) = A$.

1°. Функция $y = y(x)$ удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + \lambda(2A+\lambda)y = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x). \qquad (1)$$

Граничные условия для уравнения (1) имеют следующий вид (см. 4.9.39):

$$\begin{aligned}&\sin[\lambda(b-a)]\varphi'_x(b) - \lambda\cos[\lambda(b-a)]\varphi(b) = \lambda\varphi(a),\\ &\sin[\lambda(b-a)]\varphi'_x(a) + \lambda\cos[\lambda(b-a)]\varphi(a) = -\lambda\varphi(b),\end{aligned} \qquad \varphi(x) = y(x) - f(x). \qquad (2)$$

Уравнение (1) вместе с граничными условиями (2) описывает решение исходного интегрального уравнения.

2°. При $\lambda(2A+\lambda) = -k^2 < 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1\operatorname{ch}(kx) + C_2\operatorname{sh}(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k}\int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)]\,f(t)\,dt, \qquad (3)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $\lambda(2A+\lambda) = k^2 > 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1\cos(kx) + C_2\sin(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k}\int_a^x \sin[k(x-t)]\,f(t)\,dt. \qquad (4)$$

При $\lambda = 2A$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 + C_2 x + f(x) + 4A^2\int_a^x (x-t)f(t)\,dt. \qquad (5)$$

Условия (2) позволяют найти постоянные интегрирования C_1, C_2 в решениях (3)–(5).

30. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b t\sin(\lambda|x-t|)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.39 при $g(t) = At$. Решение интегрального уравнения может быть выражено через функции Бесселя (или модифицированные функции Бесселя) порядка $1/3$.

31. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \sin^3(\lambda|x-t|)y(t)\,dt = f(x).}$

Используя формулу $\sin^3\beta = -\frac{1}{4}\sin 3\beta + \frac{3}{4}\sin\beta$, приходим к уравнению вида 4.5.32 при $n = 2$:

$$y(x) + \int_a^b \left[-\tfrac{1}{4}A\sin(3\lambda|x-t|) + \tfrac{3}{4}A\sin(\lambda|x-t|)\right]y(t)\,dt = f(x).$$

32. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \Big[\sum_{k=1}^n A_k\sin(\lambda_k|x-t|)\Big]y(t)\,dt = f(x), \qquad -\infty < a < b < \infty.}$

1°. Раскроем модуль в одном из слагаемых в подынтегральном выражении:

$$I_k(x) = \int_a^b \sin(\lambda_k|x-t|)y(t)\,dt = \int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt + \int_x^b \sin[\lambda_k(t-x)]y(t)\,dt. \quad (1)$$

Продифференцируем (1) дважды по x. В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$\begin{aligned}I'_k &= \lambda_k\int_a^x \cos[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt - \lambda_k\int_x^b \cos[\lambda_k(t-x)]y(t)\,dt,\\ I''_k &= 2\lambda_k y(x) - \lambda_k^2\int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)]y(t)\,dt - \lambda_k^2\int_x^b \sin[\lambda_k(t-x)]y(t)\,dt.\end{aligned} \qquad (2)$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I_k'' и I_k:

$$I_k'' = 2\lambda_k y(x) - \lambda_k^2 I_k, \qquad I_k = I_k(x). \tag{3}$$

2°. Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$y(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k I_k = f(x). \tag{4}$$

Дифференцируя (4) дважды по x, с учетом равенств (3) имеем

$$y_{xx}''(x) + \sigma_n y(x) - \sum_{k=1}^{n} A_k \lambda_k^2 I_k = f_{xx}''(x), \qquad \sigma_n = 2\sum_{k=1}^{n} A_k \lambda_k. \tag{5}$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$y_{xx}''(x) + (\sigma_n + \lambda_n^2) y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) I_k = f_{xx}''(x) + \lambda_n^2 f(x). \tag{6}$$

Если продифференцировать равенство (6) дважды по x, а затем исключить интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор четвертого порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum\limits_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования последовательно исключать слагаемые $I_{n-2}, I_{n-3}, \ldots$, придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2n$.

3°. Граничные условия для функции $y(x)$ находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования. (Эти условия можно найти, подставляя значения $x = a$ и $x = b$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью двукратного дифференцирования.)

33. $\displaystyle \boldsymbol{y(x) - \lambda\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x-t)}{x-t} y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi} - \pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x-t)}{x-t} f(t)\,dt, \qquad \lambda \neq \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

⦿ *Литература*: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 87).

4.5-3. Ядра уравнений содержат тангенс

34. $\displaystyle \boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{tg}(\beta x) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{tg}(\beta x)$, $h(t) = 1$.

35. $\displaystyle \boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{tg}(\beta t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \operatorname{tg}(\beta t)$.

36. $\displaystyle \boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b [A\operatorname{tg}(\beta x) + B\operatorname{tg}(\beta t)] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.4 при $g(x) = \operatorname{tg}(\beta x)$.

37. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{tg}(\beta x)}{\operatorname{tg}(\beta t)} y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{tg}(\beta x)$, $h(t) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(\beta t)}$.

38. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{tg}(\beta t)}{\operatorname{tg}(\beta x)} y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(\beta x)}$, $h(t) = \operatorname{tg}(\beta t)$.

39. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{tg}^k(\beta x) \operatorname{tg}^m(\mu t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{tg}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{tg}^m(\mu t)$.

40. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b t^k \operatorname{tg}^m(\beta x) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{tg}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

41. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b x^k \operatorname{tg}^m(\beta t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{tg}^m(\beta t)$.

42. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{tg}(\beta t)] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{tg}(\beta t)$.

43. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{tg}(\beta x)] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{tg}(\beta x)$.

4.5-4. Ядра уравнений содержат котангенс

44. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ctg}(\beta x) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ctg}(\beta x)$, $h(t) = 1$.

45. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ctg}(\beta t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \operatorname{ctg}(\beta t)$.

46. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A \operatorname{ctg}(\beta x) + B \operatorname{ctg}(\beta t)] y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.4 при $g(x) = \operatorname{ctg}(\beta x)$.

47. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{ctg}(\beta x)}{\operatorname{ctg}(\beta t)} y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ctg}(\beta x)$, $h(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}(\beta t)}$.

48. $y(x) - \lambda \int_a^b \dfrac{\operatorname{ctg}(\beta t)}{\operatorname{ctg}(\beta x)} y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}(\beta x)}$, $h(t) = \operatorname{ctg}(\beta t)$.

49. $y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ctg}^k(\beta x) \operatorname{ctg}^m(\mu t) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ctg}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{ctg}^m(\mu t)$.

50. $y(x) - \lambda \int_a^b t^k \operatorname{ctg}^m(\beta x) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ctg}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

51. $y(x) - \lambda \int_a^b x^k \operatorname{ctg}^m(\beta t) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{ctg}^m(\beta t)$.

52. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)\operatorname{ctg}(\beta t)] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{ctg}(\beta t)$.

53. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)\operatorname{ctg}(\beta x)] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{ctg}(\beta x)$.

4.5-5. Ядра уравнений содержат комбинации тригонометрических функций

54. $y(x) - \lambda \int_a^b \cos^k(\beta x) \sin^m(\mu t) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos^k(\beta x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

55. $y(x) - \lambda \int_a^b [A\sin(\alpha x)\cos(\beta t) + B\sin(\gamma x)\cos(\delta t)] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = \sin(\alpha x)$, $h_1(t) = A\cos(\beta t)$, $g_2(x) = \sin(\gamma x)$, $h_2(t) = B\cos(\delta t)$.

56. $y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{tg}^k(\gamma x) \operatorname{ctg}^m(\mu t) y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{tg}^k(\gamma x)$, $h(t) = \operatorname{ctg}^m(\mu t)$.

57. $y(x) - \lambda \int_a^b [A\operatorname{tg}(\alpha x)\operatorname{ctg}(\beta t) + B\operatorname{tg}(\gamma x)\operatorname{ctg}(\delta t)] y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = \operatorname{tg}(\alpha x)$, $h_1(t) = A\operatorname{ctg}(\beta t)$, $g_2(x) = \operatorname{tg}(\gamma x)$, $h_2(t) = B\operatorname{ctg}(\delta t)$.

4.5-6. Сингулярное уравнение

58. $\boldsymbol{Ay(x) - \dfrac{B}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\Big(\frac{t-x}{2}\Big) y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.}$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Без потери общности можно считать, что $A^2 + B^2 = 1$.

Решение:

$$y(x) = Af(x) + \frac{B}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\Big(\frac{t-x}{2}\Big) f(t)\,dt + \frac{B^2}{2\pi A}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt.$$

⊙ *Литература*: И. К. Лифанов (1995, стр. 57).

4.6. Уравнения, ядра которых содержат обратные тригонометрические функции

4.6-1. Ядра уравнений содержат арккосинус

1. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\displaystyle\int_a^b \arccos(\beta x) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arccos(\beta x)$, $h(t) = 1$.

2. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\displaystyle\int_a^b \arccos(\beta t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \arccos(\beta t)$.

3. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\displaystyle\int_a^b \frac{\arccos(\beta x)}{\arccos(\beta t)} y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arccos(\beta x)$, $h(t) = \dfrac{1}{\arccos(\beta t)}$.

4. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\displaystyle\int_a^b \frac{\arccos(\beta t)}{\arccos(\beta x)} y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \dfrac{1}{\arccos(\beta x)}$, $h(t) = \arccos(\beta t)$.

5. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\displaystyle\int_a^b \arccos^k(\beta x) \arccos^m(\mu t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arccos^k(\beta x)$, $h(t) = \arccos^m(\mu t)$.

6. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\displaystyle\int_a^b t^k \arccos^m(\beta x) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arccos^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

7. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\displaystyle\int_a^b x^k \arccos^m(\beta t) y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \arccos^m(\beta t)$.

8. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)\arccos(\beta x)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \arccos(\beta x)$.

9. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)\arccos(\beta t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \arccos(\beta t)$.

4.6-2. Ядра уравнений содержат арксинус

10. $y(x) - \lambda \int_a^b \arcsin(\beta x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arcsin(\beta x)$, $h(t) = 1$.

11. $y(x) - \lambda \int_a^b \arcsin(\beta t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \arcsin(\beta t)$.

12. $y(x) - \lambda \int_a^b \dfrac{\arcsin(\beta x)}{\arcsin(\beta t)}y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arcsin(\beta x)$, $h(t) = \dfrac{1}{\arcsin(\beta t)}$.

13. $y(x) - \lambda \int_a^b \dfrac{\arcsin(\beta t)}{\arcsin(\beta x)}y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \dfrac{1}{\arcsin(\beta x)}$, $h(t) = \arcsin(\beta t)$.

14. $y(x) - \lambda \int_a^b \arcsin^k(\beta x)\arcsin^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arcsin^k(\beta x)$, $h(t) = \arcsin^m(\mu t)$.

15. $y(x) - \lambda \int_a^b t^k \arcsin^m(\beta x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arcsin^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

16. $y(x) - \lambda \int_a^b x^k \arcsin^m(\beta t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \arcsin^m(\beta t)$.

17. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)\arcsin(\beta t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \arcsin(\beta t)$.

18. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)\arcsin(\beta x)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \arcsin(\beta x)$.

4.6-3. Ядра уравнений содержат арктангенс

19. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{arctg}(\beta x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arctg}(\beta x)$, $h(t) = 1$.

20. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{arctg}(\beta t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \operatorname{arctg}(\beta t)$.

21. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b [A\operatorname{arctg}(\beta x) + B\operatorname{arctg}(\beta t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.4 при $g(x) = \operatorname{arctg}(\beta x)$.

22. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b \frac{\operatorname{arctg}(\beta x)}{\operatorname{arctg}(\beta t)}y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arctg}(\beta x)$, $h(t) = \dfrac{1}{\operatorname{arctg}(\beta t)}$.

23. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b \frac{\operatorname{arctg}(\beta t)}{\operatorname{arctg}(\beta x)}y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{arctg}(\beta x)}$, $h(t) = \operatorname{arctg}(\beta t)$.

24. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{arctg}^k(\beta x)\operatorname{arctg}^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arctg}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{arctg}^m(\mu t)$.

25. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b t^k\operatorname{arctg}^m(\beta x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arctg}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

26. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b x^k\operatorname{arctg}^m(\beta t)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{arctg}^m(\beta t)$.

27. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b [A + B(x-t)\operatorname{arctg}(\beta t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{arctg}(\beta t)$.

28. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b [A + B(x-t)\operatorname{arctg}(\beta x)]y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{arctg}(\beta x)$.

4.6-4. Ядра уравнений содержат арккотангенс

29. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{arcctg}(\beta x)y(t)\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arcctg}(\beta x)$, $h(t) = 1$.

30. $y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{arcctg}(\beta t) y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \operatorname{arcctg}(\beta t)$.

31. $y(x) - \lambda \int_a^b [A \operatorname{arcctg}(\beta x) + B \operatorname{arcctg}(\beta t)] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.4 при $g(x) = \operatorname{arcctg}(\beta x)$.

32. $y(x) - \lambda \int_a^b \dfrac{\operatorname{arcctg}(\beta x)}{\operatorname{arcctg}(\beta t)} y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arcctg}(\beta x)$, $h(t) = \dfrac{1}{\operatorname{arcctg}(\beta t)}$.

33. $y(x) - \lambda \int_a^b \dfrac{\operatorname{arcctg}(\beta t)}{\operatorname{arcctg}(\beta x)} y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{arcctg}(\beta x)}$, $h(t) = \operatorname{arcctg}(\beta t)$.

34. $y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{arcctg}^k(\beta x) \operatorname{arcctg}^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arcctg}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{arcctg}^m(\mu t)$.

35. $y(x) - \lambda \int_a^b t^k \operatorname{arcctg}^m(\beta x) y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arcctg}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

36. $y(x) - \lambda \int_a^b x^k \operatorname{arcctg}^m(\beta t) y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{arcctg}^m(\beta t)$.

37. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{arcctg}(\beta t)] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{arcctg}(\beta t)$.

38. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{arcctg}(\beta x)] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{arcctg}(\beta x)$.

4.7. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций

4.7-1. Ядра содержат экспоненциальные и гиперболические функции

1. $y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu(x-t)} \operatorname{ch}[\beta(x - t)] y(t)\, dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\mu x} \operatorname{ch}(\beta x)$, $h_1(t) = e^{-\mu t} \operatorname{ch}(\beta t)$, $g_2(x) = e^{\mu x} \operatorname{sh}(\beta x)$, $h_2(t) = -e^{-\mu t} \operatorname{sh}(\beta t)$.

2. $\displaystyle y(x)-\lambda\int_a^b e^{\mu(x-t)}\operatorname{sh}[\beta(x-t)]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x)=e^{\mu x}\operatorname{sh}(\beta x)$, $h_1(t)=e^{-\mu t}\operatorname{ch}(\beta t)$, $g_2(x)=e^{\mu x}\operatorname{ch}(\beta x)$, $h_2(t)=-e^{-\mu t}\operatorname{sh}(\beta t)$.

3. $\displaystyle y(x)-\lambda\int_a^b te^{\mu(x-t)}\operatorname{sh}[\beta(x-t)]y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x)=e^{\mu x}\operatorname{sh}(\beta x)$, $h_1(t)=te^{-\mu t}\operatorname{ch}(\beta t)$, $g_2(x)=e^{\mu x}\operatorname{ch}(\beta x)$, $h_2(t)=-te^{-\mu t}\operatorname{sh}(\beta t)$.

4.7-2. Ядра содержат экспоненциальные и логарифмические функции

4. $\displaystyle y(x)-\lambda\int_a^b e^{\mu t}\ln(\beta x)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x)=\ln(\beta x)$, $h(t)=e^{\mu t}$.

5. $\displaystyle y(x)-\lambda\int_a^b e^{\mu x}\ln(\beta t)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x)=e^{\mu x}$, $h(t)=\ln(\beta t)$.

6. $\displaystyle y(x)-\lambda\int_a^b e^{\mu(x-t)}\ln(\beta x)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x)=e^{\mu x}\ln(\beta x)$, $h(t)=e^{-\mu t}$.

7. $\displaystyle y(x)-\lambda\int_a^b e^{\mu(x-t)}\ln(\beta t)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x)=e^{\mu x}$, $h(t)=e^{-\mu t}\ln(\beta t)$.

8. $\displaystyle y(x)-\lambda\int_a^b e^{\mu(x-t)}(\ln x-\ln t)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x)=e^{\mu x}\ln x$, $h_1(t)=e^{-\mu t}$, $g_2(x)=e^{\mu x}$, $h_2(t)=-e^{-\mu t}\ln t$.

9. $\displaystyle y(x)+\frac{b^2-a^2}{2a}\int_0^\infty\frac{1}{t}\exp\Bigl(-a\Bigl|\ln\frac{x}{t}\Bigr|\Bigr)y(t)\,dt=f(x).$

Решение при $a>0$, $b>0$, $x>0$:
$$y(x)=f(x)+\frac{a^2-b^2}{2b}\int_0^\infty\frac{1}{t}\exp\Bigl(-b\Bigl|\ln\frac{x}{t}\Bigr|\Bigr)f(t)\,dt.$$

⦿ *Литература*: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 91).

4.7-3. Ядра содержат экспоненциальные и тригонометрические функции

10. $\displaystyle y(x)-\lambda\int_a^b e^{\mu t}\cos(\beta x)y(t)\,dt=f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x)=\cos(\beta x)$, $h(t)=e^{\mu t}$.

11. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu x} \cos(\beta t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = e^{\mu x}$, $h(t) = \cos(\beta t)$.

12. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_0^\infty e^{\mu(x-t)} \cos(xt) y(t)\, dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} + \frac{\lambda}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} \int_0^\infty e^{\mu(x-t)} \cos(xt) f(t)\, dt, \qquad \lambda \neq \pm\sqrt{2/\pi}.$$

13. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu(x-t)} \cos[\beta(x-t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\mu x} \cos(\beta x)$, $h_1(t) = e^{-\mu t} \cos(\beta t)$, $g_2(x) = e^{\mu x} \sin(\beta x)$, $h_2(t) = e^{-\mu t} \sin(\beta t)$.

14. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu t} \sin(\beta x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin(\beta x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

15. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu x} \sin(\beta t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = e^{\mu x}$, $h(t) = \sin(\beta t)$.

16. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_0^\infty e^{\mu(x-t)} \sin(xt) y(t)\, dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} + \frac{\lambda}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} \int_0^\infty e^{\mu(x-t)} \sin(xt) f(t)\, dt, \qquad \lambda \neq \pm\sqrt{2/\pi}.$$

17. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu(x-t)} \sin[\beta(x-t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\mu x} \sin(\beta x)$, $h_1(t) = e^{-\mu t} \cos(\beta t)$, $g_2(x) = e^{\mu x} \cos(\beta x)$, $h_2(t) = -e^{-\mu t} \sin(\beta t)$.

18. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu(x-t)} \Bigl\{ \sum_{k=1}^n A_k \sin[\beta_k(x-t)] \Bigr\} y(t)\, dt = f(x), \qquad n = 1, 2, \ldots}$

Частный случай уравнения 4.9.20.

19. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b t e^{\mu(x-t)} \sin[\beta(x-t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\mu x} \sin(\beta x)$, $h_1(t) = t e^{-\mu t} \cos(\beta t)$, $g_2(x) = e^{\mu x} \cos(\beta x)$, $h_2(t) = -t e^{-\mu t} \sin(\beta t)$.

20. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b x e^{\mu(x-t)} \sin[\beta(x-t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x e^{\mu x} \sin(\beta x)$, $h_1(t) = e^{-\mu t} \cos(\beta t)$, $g_2(x) = x e^{\mu x} \cos(\beta x)$, $h_2(t) = -e^{-\mu t} \sin(\beta t)$.

21. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu t} \operatorname{tg}(\beta x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{tg}(\beta x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

22. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu x} \operatorname{tg}(\beta t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = e^{\mu x}$, $h(t) = \operatorname{tg}(\beta t)$.

23. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu(x-t)} [\operatorname{tg}(\beta x) - \operatorname{tg}(\beta t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\mu x} \operatorname{tg}(\beta x)$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = e^{\mu x}$, $h_2(t) = -e^{-\mu t} \operatorname{tg}(\beta t)$.

24. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu t} \operatorname{ctg}(\beta x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ctg}(\beta x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

25. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu x} \operatorname{ctg}(\beta t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = e^{\mu x}$, $h(t) = \operatorname{ctg}(\beta t)$.

4.7-4. Ядра содержат гиперболические и логарифмические функции

26. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta x) \ln^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ch}^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

27. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta t) \ln^m(\mu x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{ch}^k(\beta t)$.

28. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}^k(\beta x) \ln^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{sh}^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

29. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}^k(\beta t) \ln^m(\mu x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^k(\beta t)$.

30. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}^k(\beta x) \ln^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

31. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}^k(\beta t) \ln^m(\mu x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{th}^k(\beta t)$.

32. $y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{cth}^k(\beta x)\ln^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{cth}^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

33. $y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{cth}^k(\beta t)\ln^m(\mu x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{cth}^k(\beta t)$.

4.7-5. Ядра содержат гиперболические и тригонометрические функции

34. $y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta x)\cos^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ch}^k(\beta x)$, $h(t) = \cos^m(\mu t)$.

35. $y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta t)\cos^m(\mu x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{ch}^k(\beta t)$.

36. $y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta x)\sin^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ch}^k(\beta x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

37. $y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta t)\sin^m(\mu x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{ch}^k(\beta t)$.

38. $y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{sh}^k(\beta x)\cos^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{sh}^k(\beta x)$, $h(t) = \cos^m(\mu t)$.

39. $y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{sh}^k(\beta t)\cos^m(\mu x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^k(\beta t)$.

40. $y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{sh}^k(\beta x)\sin^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{sh}^k(\beta x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

41. $y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{sh}^k(\beta t)\sin^m(\mu x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^k(\beta t)$.

42. $y(x) - \lambda\int_a^b \operatorname{th}^k(\beta x)\cos^m(\mu t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}^k(\beta x)$, $h(t) = \cos^m(\mu t)$.

43. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}^k(\beta t) \cos^m(\mu x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{th}^k(\beta t)$.

44. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}^k(\beta x) \sin^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}^k(\beta x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

45. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}^k(\beta t) \sin^m(\mu x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{th}^k(\beta t)$.

4.7-6. Ядра содержат логарифмические и тригонометрические функции

46. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \cos^k(\beta x) \ln^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

47. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \cos^k(\beta t) \ln^m(\mu x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \cos^k(\beta t)$.

48. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \sin^k(\beta x) \ln^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

49. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \sin^k(\beta t) \ln^m(\mu x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \sin^k(\beta t)$.

50. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{tg}^k(\beta x) \ln^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{tg}^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

51. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{tg}^k(\beta t) \ln^m(\mu x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{tg}^k(\beta t)$.

52. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ctg}^k(\beta x) \ln^m(\mu t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ctg}^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

53. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ctg}^k(\beta t) \ln^m(\mu x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{ctg}^k(\beta t)$.

4.8. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции

4.8-1. Ядра уравнений содержат функции Бесселя

1. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b J_\nu(\beta x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = J_\nu(\beta x)$, $h(t) = 1$.

2. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b J_\nu(\beta t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = J_\nu(\beta t)$.

3. $\boldsymbol{y(x) + \lambda \int_0^\infty t J_\nu(xt) y(t)\, dt = f(x), \qquad \nu > -\tfrac{1}{2}.}$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} - \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \int_0^\infty t J_\nu(xt) f(t)\, dt, \qquad \lambda \neq \pm 1.$$

4. $\boldsymbol{y(x) + \lambda \int_0^\infty J_\nu\bigl(2\sqrt{xt}\,\bigr) y(t)\, dt = f(x).}$

Положим $x = \frac{1}{2}z^2$, $t = \frac{1}{2}\tau^2$, $y(x) = Y(z)$, $f(x) = F(z)$. В результате приходим к уравнению вида 4.8.3:

$$Y(z) + \lambda \int_0^\infty \tau J_\nu(z\tau) Y(\tau)\, d\tau = F(z).$$

5. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t) J_\nu(\beta t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = J_\nu(\beta t)$.

6. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t) J_\nu(\beta x)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = J_\nu(\beta x)$.

7. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A J_\mu(\alpha x) + B J_\nu(\beta t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.5 при $g(x) = A J_\mu(\alpha x)$, $h(t) = B J_\nu(\beta t)$.

8. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A J_\mu(x) J_\nu(t) + B J_\nu(x) J_\mu(t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = J_\mu(x)$, $h(t) = J_\nu(t)$.

9. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b Y_\nu(\beta x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = Y_\nu(\beta x)$, $h(t) = 1$.

10. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b Y_\nu(\beta t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = Y_\nu(\beta t)$.

11. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)Y_\nu(\beta t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = Y_\nu(\beta t)$.

12. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)Y_\nu(\beta x)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = Y_\nu(\beta x)$.

13. $y(x) - \lambda \int_a^b [AY_\mu(\alpha x) + BY_\nu(\beta t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.5 при $g(x) = AY_\mu(\alpha x)$, $h(t) = BY_\nu(\beta t)$.

14. $y(x) - \lambda \int_a^b [AY_\mu(x)Y_\mu(t) + BY_\nu(x)Y_\nu(t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.14 при $g(x) = Y_\mu(x)$, $h(t) = Y_\nu(t)$.

15. $y(x) - \lambda \int_a^b [AY_\mu(x)Y_\nu(t) + BY_\nu(x)Y_\mu(t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = Y_\mu(x)$, $h(t) = Y_\nu(t)$.

4.8-2. Ядра уравнений содержат модифицированные функции Бесселя

16. $y(x) - \lambda \int_a^b I_\nu(\beta x)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = I_\nu(\beta x)$, $h(t) = 1$.

17. $y(x) - \lambda \int_a^b I_\nu(\beta t)y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = I_\nu(\beta t)$.

18. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)I_\nu(\beta t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = I_\nu(\beta t)$.

19. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)I_\nu(\beta x)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = I_\nu(\beta x)$.

20. $y(x) - \lambda \int_a^b [AI_\mu(\alpha x) + BI_\nu(\beta t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.5 при $g(x) = AI_\mu(\alpha x)$, $h(t) = BI_\nu(\beta t)$.

21. $y(x) - \lambda \int_a^b [AI_\mu(x)I_\mu(t) + BI_\nu(x)I_\nu(t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.14 при $g(x) = I_\mu(x)$, $h(t) = I_\nu(t)$.

22. $y(x) - \lambda \int_a^b [AI_\mu(x)I_\nu(t) + BI_\nu(x)I_\mu(t)]y(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = I_\mu(x)$, $h(t) = I_\nu(t)$.

23. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b K_\nu(\beta x) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = K_\nu(\beta x)$, $h(t) = 1$.

24. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b K_\nu(\beta t) y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = K_\nu(\beta t)$.

25. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t) K_\nu(\beta t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = K_\nu(\beta t)$.

26. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t) K_\nu(\beta x)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = K_\nu(\beta x)$.

27. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A K_\mu(\alpha x) + B K_\nu(\beta t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.5 при $g(x) = AK_\mu(\alpha x)$, $h(t) = BK_\nu(\beta t)$.

28. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A K_\mu(x) K_\mu(t) + B K_\nu(x) K_\nu(t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.14 при $g(x) = K_\mu(x)$, $h(t) = K_\nu(t)$.

29. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [A K_\mu(x) K_\nu(t) + B K_\nu(x) K_\mu(t)] y(t)\, dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = K_\mu(x)$, $h(t) = K_\nu(t)$.

4.9. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции

4.9-1. Уравнения с ядром вида $K(x,t) = g_1(x)h_1(t) + \cdots + g_n(x)h_n(t)$

1. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b g(x) h(t) y(t)\, dt = f(x).}$

1°. Случай $\lambda \neq \left(\int_a^b g(t)h(t)\, dt \right)^{-1}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda k g(x), \qquad \text{где} \quad k = \left(1 - \lambda \int_a^b g(t)h(t)\, dt \right)^{-1} \int_a^b h(t) f(t)\, dt.$$

2°. Случай $\lambda = \left(\int_a^b g(t)h(t)\, dt \right)^{-1}$.

При $\int_a^b h(t) f(t)\, dt = 0$ решение имеет вид

$$y = f(x) + Cg(x),$$

где C — произвольная постоянная.

При $\int_a^b h(t) f(t)\, dt \neq 0$ решения нет.

При условии существования соответствующих несобственных интегралов пределы интегрирования могут принимать значения $a = -\infty$ и (или) $b = \infty$.

2. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b [g(x) + g(t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{g_1 + \sqrt{(b-a)g_2}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{g_1 - \sqrt{(b-a)g_2}},$$

где

$$g_1 = \int_a^b g(x)\,dx, \quad g_2 = \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda[f_1 g_1 - (b-a)f_2]}{[g_1^2 - (b-a)g_2]\lambda^2 - 2g_1\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda(f_2 g_1 - f_1 g_2)}{[g_1^2 - (b-a)g_2]\lambda^2 - 2g_1\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = g(x) + \sqrt{\frac{g_2}{b-a}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_2(x), \quad y_2(x) = g(x) - \sqrt{\frac{g_2}{b-a}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_2(x)$ — собственная функция ядра, соответствующая характеристическому значению λ_2.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

3. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b [g(x) - g(t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 - (b-a)g_2}}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{g_1^2 - (b-a)g_2}},$$

где

$$g_1 = \int_a^b g(x)\,dx, \quad g_2 = \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 + \lambda[f_1 g_1 - (b-a)f_2]}{[(b-a)g_2 - g_1^2]\lambda^2 + 1}, \quad A_2 = \frac{-f_2 + \lambda(f_2 g_1 - f_1 g_2)}{[(b-a)g_2 - g_1^2]\lambda^2 + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 g_1}{\lambda_1(b-a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

4. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [Ag(x) + Bg(t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A+B)g_1 \pm \sqrt{(A-B)^2 g_1^2 + 4AB(b-a)g_2}}{2AB[g_1^2 - (b-a)g_2]},$$

где

$$g_1 = \int_a^b g(x)\,dx, \quad g_2 = \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{Af_1 - \lambda AB[f_1 g_1 - (b-a)f_2]}{AB[g_1^2 - (b-a)g_2]\lambda^2 - (A+B)g_1\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{Bf_2 - \lambda AB(f_2 g_1 - f_1 g_2)}{AB[g_1^2 - (b-a)g_2]\lambda^2 - (A+B)g_1\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 A g_1}{\lambda_1 A(b-a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{2}{(A+B)g_1}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x), \qquad y_*(x) = g(x) - \frac{(A-B)g_1}{2A(b-a)}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*.

5. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [g(x) + h(t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{s_1 + s_3 \pm \sqrt{(s_1 - s_3)^2 + 4(b-a)s_2}}{2[s_1 s_3 - (b-a)s_2]},$$

где

$$s_1 = \int_a^b g(x)\,dx, \quad s_2 = \int_a^b g(x)h(x)\,dx, \quad s_3 = \int_a^b h(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda[f_1 s_3 - (b-a) f_2]}{[s_1 s_3 - (b-a) s_2]\lambda^2 - (s_1 + s_3)\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda(f_2 s_1 - f_1 s_2)}{[s_1 s_3 - (b-a) s_2]\lambda^2 - (s_1 + s_3)\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x) h(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_1(x), \qquad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 s_1}{\lambda_1 (b-a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{2}{s_1 + s_3}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + C y_*(x), \qquad y_*(x) = g(x) - \frac{s_1 - s_3}{2(b-a)}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*.

6. $y(x) - \lambda \int_a^b [A g(x) + B g(t)] h(t)\, y(t)\,dt = f(x)$.

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A+B) s_1 \pm \sqrt{(A-B)^2 s_1^2 + 4AB s_0 s_2}}{2AB(s_1^2 - s_0 s_2)},$$

где

$$s_0 = \int_a^b h(x)\,dx, \quad s_1 = \int_a^b g(x) h(x)\,dx, \quad s_2 = \int_a^b g^2(x) h(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{A f_1 - AB\lambda(f_1 s_1 - f_2 s_0)}{AB(s_1^2 - s_0 s_2)\lambda^2 - (A+B) s_1 \lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{B f_2 - AB\lambda(f_2 s_1 - f_1 s_2)}{AB(s_1^2 - s_0 s_2)\lambda^2 - (A+B) s_1 \lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) h(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x) g(x) h(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_1(x), \qquad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 A s_1}{\lambda_1 A s_0},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{2}{(A+B)s_1}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*:

a) если $A \neq B$, то $4ABs_0s_2 = -(A-B)^2s_1^2$ и

$$y_*(x) = g(x) - \frac{(A-B)s_1}{2As_0};$$

b) если $A = B$, то в силу равенства $4ABs_0s_2 = -(A-B)^2s_1^2 = 0$ имеем

$$y_*(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } s_0 \neq 0,\ s_2 = 0, \\ 1 & \text{при } s_0 = 0,\ s_2 \neq 0, \\ C_1g(x) + C_2 & \text{при } s_0 = s_2 = 0, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

7. $y(x) - \lambda\displaystyle\int_a^b [Ag(x) + Bg(t) + C]h(t)\,y(t)\,dt = f(x)$.

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A+B)s_1 + Cs_0 \pm \sqrt{(A-B)^2s_1^2 + 2(A+B)Cs_1s_0 + C^2s_0^2 + 4ABs_0s_2}}{2AB(s_1^2 - s_0s_2)},$$

где

$$s_0 = \int_a^b h(x)\,dx, \quad s_1 = \int_a^b g(x)h(x)\,dx, \quad s_2 = \int_a^b g^2(x)h(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1g(x) + A_2],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{Af_1 - AB\lambda(f_1s_1 - f_2s_0)}{AB(s_1^2 - s_0s_2)\lambda^2 - [(A+B)s_1 + Cs_0]\lambda + 1},$$
$$A_2 = \frac{C_1f_1 + Bf_2 - AB\lambda(f_2s_1 - f_1s_2)}{AB(s_1^2 - s_0s_2)\lambda^2 - [(A+B)s_1 + Cs_0]\lambda + 1},$$
$$f_1 = \int_a^b f(x)h(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)g(x)h(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + \widetilde{C}y_1(x), \qquad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1As_1}{\lambda_1As_0},$$

где $\widetilde{C}$ — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{2}{(A+B)s_1 + Cs_0}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + \widetilde{C}y_*(x).$$

Здесь $\widetilde{C}$ — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*:

a) если $(A-B)s_1 - Cs_0 \neq 0$, то $4As_0(Bs_2 + Cs_1) = -[(A-B)s_1 - Cs_0]^2$ и
$$y_*(x) = g(x) - \frac{(A-B)s_1 - Cs_0}{2As_0};$$
b) если $(A-B)s_1 - Cs_0 = 0$, то в силу равенства $4As_0(Bs_2 + Cs_1) = 0$ имеем
$$y_*(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } s_0 \neq 0,\ Bs_2 = -Cs_1, \\ 1 & \text{при } s_0 = 0,\ Bs_2 \neq -Cs_1, \\ \widetilde{C}_1 g(x) + \widetilde{C}_2 & \text{при } s_0 = 0,\ Bs_2 = -Cs_1, \end{cases}$$
где $\widetilde{C}_1$ и $\widetilde{C}_2$ — произвольные постоянные.

8. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b [A + B(x-t)h(t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:
$$\lambda_{1,2} = \frac{A(b-a) \pm \sqrt{[A(b-a) - 2Bh_1]^2 + 2Bh_0[A(b^2-a^2) - 2Bh_2]}}{B\bigl\{A(b-a)[2h_1 - (b+a)h_0] - 2B(h_1^2 - h_0h_2)\bigr\}},$$
где
$$h_0 = \int_a^b h(x)\,dx, \quad h_1 = \int_a^b xh(x)\,dx, \quad h_2 = \int_a^b x^2h(x)\,dx.$$
1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:
$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2x),$$
где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам
$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda\left[B(f_1h_1 + f_2h_2) - \frac{1}{2}Af_2(b^2-a^2)\right]}{B\left\{A(b-a)\left[h_1 - \frac{1}{2}(b+a)h_0\right] - B(h_1^2 - h_0h_2)\right\}\lambda^2 + A(b-a)\lambda + 1},$$
$$A_2 = \frac{f_2 - \lambda[A(b-a)f_2 - B(f_1h_0 + f_2h_1)]}{B\left\{A(b-a)\left[h_1 - \frac{1}{2}(b+a)h_0\right] - B(h_1^2 - h_0h_2)\right\}\lambda^2 + A(b-a)\lambda + 1},$$
$$f_1 = A\int_a^b f(x)\,dx - B\int_a^b xf(x)h(x)\,dx, \quad f_2 = B\int_a^b f(x)h(x)\,dx.$$
2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:
$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = 1 + \frac{2 - 2\lambda_1[A(b-a) - Bh_1]}{\lambda_1[A(b^2-a^2) - 2Bh_2]}\,x,$$
где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{2}{A(b-a)}$ $(A \neq 0)$ — двукратное характеристическое значение:
$$y(x) = f(x) + Cy_*(x).$$
Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*:

a) если $A(b-a) - 2Bh_1 \neq 0$, то
$$y_*(x) = 1 - \frac{A(b-a) - 2Bh_1}{A(b^2-a^2) - 2Bh_2}\,x;$$
b) если $A(b-a) - 2Bh_1 = 0$, то в силу равенства $h_0[A(b^2-a^2) - 2Bh_2] = 0$ имеем
$$y_*(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } h_0 \neq 0,\ A(b^2-a^2) = 2Bh_2, \\ x & \text{при } h_0 = 0,\ A(b^2-a^2) \neq 2Bh_2, \\ C_1 + C_2x & \text{при } h_0 = 0,\ A(b^2-a^2) = 2Bh_2, \end{cases}$$
где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

9. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b [A + (Bx + Ct)h(t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{A(b-a) + (C+B)h_1 \pm \sqrt{D}}{B\big\{A(b-a)[2h_1 - (b+a)h_0] + 2C(h_1^2 - h_0h_2)\big\}},$$

$$D = [A(b-a) + (C-B)h_1]^2 + 2Bh_0[A(b^2-a^2) + 2Ch_2],$$

где

$$h_0 = \int_a^b h(x)\,dx, \quad h_1 = \int_a^b xh(x)\,dx, \quad h_2 = \int_a^b x^2h(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2x),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \Delta^{-1}\left\{f_1 - \lambda\left[Bf_1h_1 - Cf_2h_2 - \tfrac{1}{2}A(b^2-a^2)f_2\right]\right\},$$

$$A_2 = \Delta^{-1}\left\{f_2 - \lambda\big[A(b-a)f_2 - Bf_1h_0 + Cf_2h_1\big]\right\},$$

$$\Delta = B\left\{A(b-a)\left[h_1 - \tfrac{1}{2}(b+a)h_0\right] + C(h_1^2 - h_0h_2)\right\}\lambda^2 + [A(b-a) + (B+C)h_1]\lambda + 1,$$

$$f_1 = A\int_a^b f(x)\,dx + C\int_a^b xf(x)h(x)\,dx, \quad f_2 = B\int_a^b f(x)h(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + \widetilde{C}y_1(x), \qquad y_1(x) = 1 + \frac{2 - 2\lambda_1[A(b-a) + Ch_1]}{\lambda_1[A(b^2-a^2) + 2Ch_2]}\,x,$$

где $\widetilde{C}$ — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{2}{A(b-a) + (B+C)h_1}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + \widetilde{C}y_*(x).$$

Здесь $\widetilde{C}$ — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*:

a) если $A(b-a) + (C-B)h_1 \neq 0$, то

$$y_*(x) = 1 - \frac{A(b-a) + (C-B)h_1}{A(b^2-a^2) + 2Ch_2}\,x;$$

b) если $A(b-a) + (C-B)h_1 = 0$, то в силу равенства $h_0[A(b^2-a^2) + 2Ch_2] = 0$ имеем

$$y_*(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } h_0 \neq 0,\ A(b^2-a^2) = -2Ch_2, \\ x & \text{при } h_0 = 0,\ A(b^2-a^2) \neq -2Ch_2, \\ \widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2x & \text{при } h_0 = 0,\ A(b^2-a^2) = -2Ch_2, \end{cases}$$

где $\widetilde{C}_1$ и $\widetilde{C}_2$ — произвольные постоянные.

10. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b [A + B(x-t)h(x)]y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{A(b-a) \pm \sqrt{[A(b-a) + 2Bh_1]^2 - 2Bh_0[A(b^2-a^2) + 2Bh_2]}}{B\{h_0[A(b^2-a^2) + 2Bh_2] - 2h_1[A(b-a) + Bh_1]\}},$$

где

$$h_0 = \int_a^b h(x)\,dx, \quad h_1 = \int_a^b xh(x)\,dx, \quad h_2 = \int_a^b x^2h(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda\bigl[AE_1 + (BE_1x + E_2)h(x)\bigr],$$

где постоянные E_1 и E_2 вычисляются по формулам

$$E_1 = \Delta^{-1}\bigl[f_1 + \lambda B(f_1h_1 - f_2h_0)\bigr],$$
$$E_2 = B\Delta^{-1}\bigl\{-f_2 + \lambda f_2\bigl[A(b-a) + Bh_1\bigr] + \lambda f_1\bigl[\tfrac{1}{2}A(b^2-a^2) + Bh_2\bigr]\bigr\},$$
$$\Delta = B\left\{h_0\left[\tfrac{1}{2}A(b^2-a^2) + Bh_2\right] - h_1[A(b-a) + Bh_1]\right\}\lambda^2 - A(b-a)\lambda + 1,$$
$$f_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b xf(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = A + Bxh(x) + \frac{1 - \lambda_1[A(b-a) + Bh_1]}{\lambda_1 h_0}h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{2}{A(b-a)}$ $(A \neq 0)$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*:

a) если $A(b-a) \neq -2Bh_1$, то

$$y_*(x) = A + Bxh(x) - \frac{A(b-a) + 2Bh_1}{2h_0}h(x);$$

b) если $A(b-a) = -2Bh_1$, то в силу равенства $h_0[A(b^2-a^2) + 2Bh_2] = 0$ имеем

$$y_*(x) = \begin{cases} A + Bxh(x) & \text{при } h_0 \neq 0,\ A(b^2-a^2) = -2Bh_2, \\ h(x) & \text{при } h_0 = 0,\ A(b^2-a^2) \neq -2Bh_2, \\ C_1[A + Bxh(x)] + C_2h(x) & \text{при } h_0 = 0,\ A(b^2-a^2) = -2Bh_2, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

11. $y(x) - \lambda\displaystyle\int_a^b [A + (Bx + Ct)h(x)]y(t)\,dt = f(x).$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{A(b-a) + (B+C)h_1 \pm \sqrt{D}}{C\{2h_1[A(b-a) + Bh_1] - h_0[A(b^2-a^2) + 2Bh_2]\}},$$
$$D = [A(b-a) + (B-C)h_1]^2 + 2Ch_0[A(b^2-a^2) + 2Bh_2],$$

где

$$h_0 = \int_a^b h(x)\,dx, \quad h_1 = \int_a^b xh(x)\,dx, \quad h_2 = \int_a^b x^2h(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda\bigl[AE_1 + (BE_1x + E_2)h(x)\bigr],$$

где постоянные E_1 и E_2 вычисляются по формулам

$$E_1 = \Delta^{-1}[f_1 - \lambda C(f_1h_1 - f_2h_0)],$$
$$E_2 = C\Delta^{-1}\bigl\{f_2 - \lambda f_2\bigl[A(b-a) + Bh_1\bigr] - \lambda f_1\bigl[\tfrac{1}{2}A(b^2-a^2) + Bh_2\bigr]\bigr\},$$
$$\Delta = C\bigl\{h_1[A(b-a)+Bh_1] - h_0\bigl[\tfrac{1}{2}A(b^2-a^2)+Bh_2\bigr]\bigr\}\lambda^2 - [A(b-a)+(B+C)h_1]\lambda + 1,$$
$$f_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b xf(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + \widetilde{C}y_1(x), \qquad y_1(x) = A + Bxh(x) + \frac{1 - \lambda_1[A(b-a) + Bh_1]}{\lambda_1 h_0}\,h(x),$$

где $\widetilde{C}$ — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{2}{A(b-a) + (B+C)h_1}$ $(A \neq 0)$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + \widetilde{C}y_*(x).$$

Здесь $\widetilde{C}$ — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*:

a) если $A(b-a) + Bh_1 \neq Ch_1$, то

$$y_*(x) = A + Bxh(x) - \frac{A(b-a) + (B-C)h_1}{2h_0}\,h(x);$$

b) если $A(b-a) + Bh_1 = Ch_1$, то в силу равенства $h_0[A(b^2-a^2) + 2Bh_2] = 0$ имеем

$$y_*(x) = \begin{cases} A + Bxh(x) & \text{при } h_0 \neq 0,\ A(b^2-a^2) = -2Bh_2, \\ h(x) & \text{при } h_0 = 0,\ A(b^2-a^2) \neq -2Bh_2, \\ \widetilde{C}_1[A + Bxh(x)] + \widetilde{C}_2h(x) & \text{при } h_0 = 0,\ A(b^2-a^2) = -2Bh_2, \end{cases}$$

где $\widetilde{C}_1$ и $\widetilde{C}_2$ — произвольные постоянные.

12. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b [g(x)g(t) + h(x)h(t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{s_1 + s_3 + \sqrt{(s_1 - s_3)^2 + 4s_2^2}}{2(s_1s_3 - s_2^2)}, \quad \lambda_2 = \frac{s_1 + s_3 - \sqrt{(s_1 - s_3)^2 + 4s_2^2}}{2(s_1s_3 - s_2^2)},$$

где

$$s_1 = \int_a^b g^2(x)\,dx, \quad s_2 = \int_a^b g(x)h(x)\,dx, \quad s_3 = \int_a^b h^2(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1g(x) + A_2h(x)],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda(f_1s_3 - f_2s_2)}{(s_1s_3 - s_2^2)\lambda^2 - (s_1 + s_3)\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda(f_2s_1 - f_1s_2)}{(s_1s_3 - s_2^2)\lambda^2 - (s_1 + s_3)\lambda + 1},$$
$$f_1 = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)h(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 s_1}{\lambda_1 s_2} h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{1}{s_1}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + \widetilde{C}_1 g(x) + \widetilde{C}_2 h(x),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

13. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [g(x)g(t) - h(x)h(t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{s_1 - s_3 + \sqrt{(s_1 + s_3)^2 - 4s_2^2}}{2(s_2^2 - s_1 s_3)}, \quad \lambda_2 = \frac{s_1 - s_3 - \sqrt{(s_1 + s_3)^2 - 4s_2^2}}{2(s_2^2 - s_1 s_3)},$$

где

$$s_1 = \int_a^b g^2(x)\,dx, \quad s_2 = \int_a^b g(x)h(x)\,dx, \quad s_3 = \int_a^b h^2(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2 h(x)],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 + \lambda(f_1 s_3 - f_2 s_2)}{(s_2^2 - s_1 s_3)\lambda^2 - (s_1 - s_3)\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{-f_2 + \lambda(f_2 s_1 - f_1 s_2)}{(s_2^2 - s_1 s_3)\lambda^2 - (s_1 - s_3)\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)h(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 s_1}{\lambda_1 s_2} h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{2}{s_1 - s_3}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x), \qquad y_*(x) = g(x) - \frac{s_1 + s_3}{2s_2} h(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*.

14. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [Ag(x)g(t) + Bh(x)h(t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{As_1 + Bs_3 \pm \sqrt{(As_1 - Bs_3)^2 + 4ABs_2^2}}{2AB(s_1 s_3 - s_2^2)},$$

где

$$s_1 = \int_a^b g^2(x)\,dx, \quad s_2 = \int_a^b g(x)h(x)\,dx, \quad s_3 = \int_a^b h^2(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2 h(x)],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{Af_1 - \lambda AB(f_1 s_3 - f_2 s_2)}{AB(s_1 s_3 - s_2^2)\lambda^2 - (As_1 + Bs_3)\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{Bf_2 - \lambda AB(f_2 s_1 - f_1 s_2)}{AB(s_1 s_3 - s_2^2)\lambda^2 - (As_1 + Bs_3)\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)h(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 As_1}{\lambda_1 As_2} h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{2}{As_1 + Bs_3}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*:

a) если $As_1 \neq Bs_3$, то $4ABs_2^2 = -(As_1 - Bs_3)^2$, $AB < 0$ и

$$y_*(x) = g(x) - \frac{As_1 - Bs_3}{2As_2} h(x);$$

b) если $As_1 = Bs_3$, то в силу равенства $s_2 = 0$ имеем

$$y_*(x) = C_1 g(x) + C_2 h(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

15. $\boldsymbol{y(x) - \lambda \int_a^b [g(x)h(t) + h(x)g(t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{s_1 + \sqrt{s_2 s_3}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{s_1 - \sqrt{s_2 s_3}},$$

где

$$s_1 = \int_a^b h(x)g(x)\,dx, \quad s_2 = \int_a^b h^2(x)\,dx, \quad s_3 = \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2 h(x)],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda(f_1 s_1 - f_2 s_2)}{(s_1^2 - s_2 s_3)\lambda^2 - 2s_1\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda(f_2 s_1 - f_1 s_3)}{(s_1^2 - s_2 s_3)\lambda^2 - 2s_1\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)h(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = g(x) + \sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\,h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_2(x), \qquad y_2(x) = g(x) - \sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\,h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_2(x)$ — собственная функция ядра, соответствующая характеристическому значению λ_2.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

16. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b [g(x)h(t) - h(x)g(t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{s_1^2 - s_2 s_3}}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{s_1^2 - s_2 s_3}},$$

где

$$s_1 = \int_a^b h(x)g(x)\,dx, \quad s_2 = \int_a^b h^2(x)\,dx, \quad s_3 = \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2 h(x)],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 + \lambda(f_1 s_1 - f_2 s_2)}{(s_2 s_3 - s_1^2)\lambda^2 + 1}, \quad A_2 = \frac{-f_2 + \lambda(f_2 s_1 - f_1 s_3)}{(s_2 s_3 - s_1^2)\lambda^2 + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)h(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = g(x) + \frac{\sqrt{s_1^2 - s_2 s_3} - s_1}{s_2}\,h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_2(x), \qquad y_2(x) = g(x) - \frac{\sqrt{s_1^2 - s_2 s_3} + s_1}{s_2}\,h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_2(x)$ — собственная функция ядра, соответствующая характеристическому значению λ_2.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

17. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b [Ag(x)h(t) + Bh(x)g(t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A+B)s_1 \pm \sqrt{(A-B)^2 s_1^2 + 4ABs_2 s_3}}{2AB(s_1^2 - s_2 s_3)},$$

где

$$s_1 = \int_a^b h(x)g(x)\,dx, \quad s_2 = \int_a^b h^2(x)\,dx, \quad s_3 = \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2 h(x)],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{Af_1 - \lambda AB(f_1 s_1 - f_2 s_2)}{AB(s_1^2 - s_2 s_3)\lambda^2 - (A+B)s_1\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{Bf_2 - \lambda AB(f_2 s_1 - f_1 s_3)}{AB(s_1^2 - s_2 s_3)\lambda^2 - (A+B)s_1\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)h(x)\,dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \qquad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 A s_1}{\lambda_1 A s_2} h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1.

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{2}{(A+B)s_1}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x), \qquad y_*(x) = g(x) - \frac{(A-B)s_1}{2As_2} h(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*.

18. $\boldsymbol{y(x) - \lambda\int_a^b [g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)]y(t)\,dt = f(x).}$

Характеристические значения уравнения λ_1 и λ_2 даются формулами:

$$\lambda_{1,2} = \frac{s_{11} + s_{22} \pm \sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}s_{21}}}{2(s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21})},$$

причем существуют следующие определенные интегралы:

$$s_{11} = \int_a^b h_1(x)g_1(x)\,dx, \quad s_{12} = \int_a^b h_1(x)g_2(x)\,dx,$$

$$s_{21} = \int_a^b h_2(x)g_1(x)\,dx, \quad s_{22} = \int_a^b h_2(x)g_2(x)\,dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g_1(x) + A_2 g_2(x)],$$

где постоянные A_1 и A_2 заданы соотношениями

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda(f_1 s_{22} - f_2 s_{12})}{(s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21})\lambda^2 - (s_{11} + s_{22})\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda(f_2 s_{11} - f_1 s_{21})}{(s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21})\lambda^2 - (s_{11} + s_{22})\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) h_1(x)\, dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x) h_2(x)\, dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_1(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция ядра, соответствующая характеристическому значению λ_1:

$$y_1(x) = g_1(x) + \frac{1 - \lambda_1 s_{11}}{\lambda_1 s_{12}} g_2(x) = g_1(x) + \frac{\lambda_1 s_{21}}{1 - \lambda_1 s_{22}} g_2(x).$$

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \dfrac{2}{s_{11} + s_{22}}$ — двукратное характеристическое значение (при $s_{11} = -s_{22}$ такого числа не существует):

$$y(x) = f(x) + C y_*(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_*:

a) если $s_{11} \neq s_{22}$, то $s_{12} = -\frac{1}{4}(s_{11} - s_{22})^2 / s_{21}$, $s_{21} \neq 0$ и

$$y_*(x) = g_1(x) - \frac{s_{11} - s_{22}}{2 s_{12}} g_2(x), \qquad (s_{12}s_{21} < 0);$$

b) если $s_{11} = s_{22}$, то в силу равенства $s_{12}s_{21} = -\frac{1}{4}(s_{11} - s_{22})^2 = 0$ имеем

$$y_*(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{при } \ s_{12} \neq 0,\ s_{21} = 0, \\ g_2(x) & \text{при } \ s_{12} = 0,\ s_{21} \neq 0, \\ C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) & \text{при } \ s_{12} = 0,\ s_{21} = 0, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

19. $y(x) - \lambda \int_a^b [g(x) + h(t)]^m\, y(t)\, dt = f(x), \qquad m = 1, 2, \ldots$

Частный случай уравнения 4.9.20 при $g_k(x) = g^k(x)$, $h_k(t) = C_m^k h^{m-k}(t)$, $k = 1, \ldots, m$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=0}^{m} A_k g^k(x),$$

где A_k — постоянные, которые можно определить на основании 4.9.20.

20. $y(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} g_k(x) h_k(t) \right] y(t)\, dt = f(x), \quad n = 2, 3, \ldots$

Характеристические значения интегрального уравнения λ_i (их ровно n штук с учетом кратности) являются корнями следующего алгебраического уравнения:

$$\Delta(\lambda) = 0,$$

где

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda s_{11} & -\lambda s_{12} & \cdots & -\lambda s_{1n} \\ -\lambda s_{21} & 1-\lambda s_{22} & \cdots & -\lambda s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda s_{n1} & -\lambda s_{n2} & \cdots & 1-\lambda s_{nn} \end{vmatrix}=(-\lambda)^n\begin{vmatrix} s_{11}-\lambda^{-1} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22}-\lambda^{-1} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn}-\lambda^{-1} \end{vmatrix},$$

причем существуют определенные интегралы

$$s_{mk}=\int_a^b h_m(x)g_k(x)\,dx;\qquad m,k=1,\dots,n.$$

1°. Решение при регулярном λ:

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^n A_k g_k(x),$$

где постоянные A_k есть решение следующей системы алгебраических уравнений:

$$A_m-\lambda\sum_{k=1}^n s_{mk}A_k=f_m,\qquad f_m=\int_a^b f(x)h_m(x)\,dx,\quad m=1,\dots,n.$$

Постоянные A_k можно определить по формулам Крамера

$$A_k=\Delta_k(\lambda)/\Delta(\lambda),$$

где

$$\Delta_k(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda s_{11} & \cdots & -\lambda s_{1k-1} & f_1 & -\lambda s_{1k+1} & \cdots & -\lambda s_{1n} \\ -\lambda s_{21} & \cdots & -\lambda s_{2k-1} & f_2 & -\lambda s_{2k+1} & \cdots & -\lambda s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda s_{n1} & \cdots & -\lambda s_{nk-1} & f_n & -\lambda s_{nk+1} & \cdots & 1-\lambda s_{nn} \end{vmatrix}.$$

2°. Решение при характеристическом λ и $f(x)=0$:

$$y(x)=\sum_{i=1}^p C_i y_i(x),$$

где C_i — произвольные постоянные, $y_i(x)$ — линейно независимые собственные функции уравнения, соответствующие характеристическому значению λ:

$$y_i(x)=\sum_{k=1}^n A_{k(i)}g_k(x).$$

Здесь постоянные $A_{k(i)}$ составляют p ($p\leqslant n$) линейно независимых решений следующей однородной системы алгебраических уравнений:

$$A_{m(i)}-\lambda\sum_{k=1}^n s_{mk}A_{k(i)}=0;\qquad m=1,\dots,n,\quad i=1,\dots,p.$$

3°. Решение при характеристическом λ и $f(x)\neq 0$ существует тогда и только тогда, когда правая часть уравнения удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

$$\sum_{k=1}^n B_{k(i)}f_k=0,\qquad i=1,\dots,p,\quad p\leqslant n.$$

Здесь постоянные $B_{k(i)}$ составляют p линейно независимых решений однородной системы алгебраических уравнений, которая является транспонированной к системе, рассмотренной в п. 2°. В этом случае решение имеет вид

$$y(x)=y_0(x)+\sum_{i=1}^p C_i y_i(x),$$

где $y_0(x)$ — частное решение исходного неоднородного уравнения, а сумма представляет собой общее решение соответствующего однородного уравнения (см. п. 2°). В частности, если $f(x)\neq 0$, но все f_k равны нулю, то $y_0(x)=f(x)$.

⦿ *Литература*: С. Г. Михлин (1959, стр. 59).

4.9-2. Уравнения с разностным ядром: $K(x,t) = K(x-t)$

21. $\boldsymbol{y(x) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)y(t)\,dt, \qquad K(x) = K(-x).}$

Характеристические значения:

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi a_n}, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(x)\cos(nx)\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Соответствующие им собственные функции:

$$y_0(x) = 1, \quad y_n^{(1)}(x) = \cos(nx), \quad y_n^{(2)}(x) = \sin(nx) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Каждому значению λ_n при $n \neq 0$ отвечают две линейно независимые собственные функции $y_n^{(1)}(x)$ и $y_n^{(2)}(x)$.

⊙ *Литература*: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 103).

22. $\boldsymbol{y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = Ae^{\lambda x}.}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{1+q}e^{\lambda x}, \qquad q = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-\lambda x}\,dx.$$

23. $\boldsymbol{y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{AI_{\rm c} + BI_{\rm s}}{I_{\rm c}^2 + I_{\rm s}^2}\cos(\lambda x) + \frac{BI_{\rm c} - AI_{\rm s}}{I_{\rm c}^2 + I_{\rm s}^2}\sin(\lambda x),$$

$$I_{\rm c} = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(z)\cos(\lambda z)\,dz, \quad I_{\rm s} = \int_{-\infty}^{\infty} K(z)\sin(\lambda z)\,dz.$$

24. $\boldsymbol{y(x) - \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = f(x).}$

Здесь $-\infty < x < +\infty$, $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, $K(x) \in L_1(-\infty, \infty)$.

Для разрешимости интегрального уравнения (в L_1) необходимо и достаточно выполнения условия

$$1 - \sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}(u) \neq 0, \qquad -\infty < u < \infty, \tag{1}$$

где $\widetilde{K}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-iux}dx$ — преобразование Фурье функции $K(x)$. При выполнении условия (1) уравнение имеет единственное решение, представимое формулой

$$y(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} R(x-t)f(t)\,dt,$$

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{R}(u)e^{iux}\,du, \qquad \widetilde{R}(u) = \frac{\widetilde{K}(u)}{1 - \sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}(u)}.$$

⊙ *Литература*: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 25).

25. $\boldsymbol{y(x) - \int_0^\infty K(x-t)y(t)\,dt = f(x).}$

Уравнение Винера — Хопфа второго рода.

Здесь $0 \leqslant x < \infty$, $K(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, $f(x) \in L_1(0, \infty)$, $y(x) \in L_1(0, \infty)$.

Для разрешимости интегрального уравнения необходимо и достаточно выполнения условия

$$\Omega(u) = 1 - \check{\mathcal{K}}(u) \neq 0, \qquad -\infty < u < \infty, \tag{1}$$

где $\check{\mathcal{K}}(u) = \int_{-\infty}^\infty K(x)e^{iux}\,dx$ — преобразование Фурье (несимметричная форма) функции $K(x)$. При выполнении условия (1) определяется индекс уравнения

$$\nu = -\operatorname{ind}\Omega(u) = -\frac{1}{2\pi}\big[\arg\Omega(u)\big]_{-\infty}^{\infty}.$$

1°. Решение при $\nu = 0$:

$$y(x) = f(x) + \int_0^\infty R(x,t)f(t)\,dt,$$

где

$$R(x,t) = R_+(x-t) + R_-(t-x) + \int_0^\infty R_+(x-s)R_-(t-s)\,ds,$$

а функции $R_+(x)$ и $R_-(x)$, такие что $R_+(x) = 0$ и $R_-(x) = 0$ при $x < 0$, однозначно определяются своими преобразованиями Фурье:

$$1 + \int_0^\infty R_\pm(t)e^{\pm iut}\,dt = \exp\left[-\frac{1}{2}\ln\Omega(u) \mp \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln\Omega(t)}{t-u}\,dt\right].$$

Функции $R_+(x)$ и $R_-(x)$ можно также получить, построив решения следующих уравнений:

$$R_+(x) + \int_0^\infty K(x-t)R_+(t)\,dt = K(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \infty,$$
$$R_-(x) + \int_0^\infty K(t-x)R_-(t)\,dt = K(-x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \infty.$$

2°. Решение при $\nu > 0$:

$$y(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\nu} C_m x^{m-1}e^{-x} + \int_0^\infty R^\circ(x,t)\left[f(t) + \sum_{m=1}^{\nu} C_m t^{m-1}e^{-t}\right]dt,$$

где C_m — произвольные постоянные,

$$R^\circ(x,t) = R_+^{(0)}(x-t) + R_-^{(1)}(t-x) + \int_0^\infty R_+^{(0)}(x-s)R_-^{(1)}(t-s)\,ds,$$

а функции $R_+^{(0)}(x)$ и $R_-^{(1)}(x)$ однозначно определяются своими преобразованиями Фурье:

$$1 + \int_0^\infty R_\pm^{(1)}(t)e^{\pm iut}\,dt = \left(\frac{u-i}{u+i}\right)^{\nu}\left[1 + \int_0^\infty R_\pm^{(0)}(t)e^{\pm iut}\,dt\right],$$
$$1 + \int_0^\infty R_\pm^{(0)}(t)e^{\pm iut}\,dt = \exp\left[-\frac{1}{2}\ln\Omega^\circ(u) \mp \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln\Omega^\circ(t)}{t-u}\,dt\right],$$
$$\Omega^\circ(u)(u+i)^\nu = \Omega(u)(u-i)^\nu.$$

3°. Решение при $\nu < 0$ существует лишь в случае, когда выполнены условия

$$\int_0^\infty f(x)\psi_m(x)\,dx = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, -\nu,$$

где $\psi_1(x)$, …, $\psi_\nu(x)$ — система линейно независимых решений транспонированного однородного уравнения

$$\psi(x) - \int_0^\infty K(t-x)\psi(t)\,dt = 0.$$

Тогда

$$y(x) = f(x) + \int_0^\infty R^*(x,t)f(t)\,dt,$$

где

$$R^*(x,t) = R_+^{(1)}(x-t) + R_-^{(0)}(t-x) + \int_0^\infty R_+^{(1)}(x-s)R_-^{(0)}(t-s)\,ds,$$

а функции $R_+^{(1)}(x)$ и $R_-^{(0)}(x)$ однозначно определены в п. 2° своими преобразованиями Фурье.

⊙ *Литература*: В. И. Смирнов (1974, стр. 195), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 55, 56), Математическая Энциклопедия (1979, т. 2, стр. 598, 599).

4.9-3. Другие уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = F(x)$

26. $y(x) - \int_{-\infty}^{\infty} K(x+t)y(t)\,dt = f(x).$

Для решения этого уравнения используют преобразование Фурье.
Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{f}(u) + \sqrt{2\pi}\,\widetilde{f}(-u)\widetilde{K}(u)}{1 - \sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}(u)\widetilde{K}(-u)} e^{iux}\,du,$$

где

$$\widetilde{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\,dx, \quad \widetilde{K}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-iux}\,dx.$$

⊙ *Литература*: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 28).

27. $y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta t} K(x+t)y(t)\,dt = Ae^{\lambda x}.$

Решение:

$$y(x) = \frac{e^{\lambda x} - k(\lambda)e^{-(\beta+\lambda)x}}{1 - k(\lambda)k(-\beta-\lambda)}, \qquad k(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{(\lambda+\beta)x}\,dx.$$

28. $y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} [e^{\beta t} K(x+t) + M(x-t)]y(t)\,dt = Ae^{\lambda x}.$

Решение:

$$y(x) = A\,\frac{I_k(\lambda)e^{px} - [1 + I_m(p)]e^{\lambda x}}{I_k(\lambda)I_k(p) - [1 + I_m(\lambda)][1 + I_m(p)]}, \qquad p = -\lambda - \beta,$$

где

$$I_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(z)e^{(\beta+\lambda)z}\,dz, \quad I_m(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} M(z)e^{-\lambda z}\,dz.$$

29. $\boldsymbol{y(x) - \int_0^\infty K(xt)y(t)\,dt = f(x).}$

Решение находится с помощью формулы обращения преобразования Меллина

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\widetilde{f}(s) + \widetilde{K}(s)\widetilde{f}(1-s)}{1 - \widetilde{K}(s)\widetilde{K}(1-s)} x^{-s}\,ds,$$

где через $\widetilde{f}$ и $\widetilde{K}$ обозначены преобразования Меллина правой части и ядра интегрального уравнения:

$$\widetilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx, \quad \widetilde{K}(s) = \int_0^\infty K(x)x^{s-1}\,dx.$$

⦿ *Литература*: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 147).

30. $\boldsymbol{y(x) - \int_0^\infty K(xt)t^\beta y(t)\,dt = Ax^\lambda.}$

Решение:

$$y(x) = A\frac{x^\lambda + I_{\beta+\lambda}x^{-\beta-\lambda-1}}{1 - I_{\beta+\lambda}I_{-\lambda-1}}, \qquad I_\mu = \int_0^\infty K(\xi)\xi^\mu\,d\xi.$$

Считается, что все несобственные интегралы существуют.

31. $\boldsymbol{y(x) - \int_0^\infty K(xt)t^\beta y(t)\,dt = f(x).}$

Решение находится с помощью обратного преобразования Меллина

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\widetilde{f}(s) + \widetilde{K}(s)\widetilde{f}(1+\beta-s)}{1 - \widetilde{K}(s)\widetilde{K}(1+\beta-s)} x^{-s}\,ds,$$

где через $\widetilde{f}$ и $\widetilde{K}$ обозначены преобразования Меллина правой части и ядра интегрального уравнения:

$$\widetilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx, \quad \widetilde{K}(s) = \int_0^\infty K(x)x^{s-1}\,dx.$$

32. $\boldsymbol{y(x) - \int_0^\infty g(xt)x^\lambda t^\mu y(t)\,dt = f(x).}$

Это уравнение можно записать в виде уравнения 4.9.31, если обозначить $K(z) = z^\lambda g(z)$, $\beta = \mu - \lambda$.

33. $\boldsymbol{y(x) - \int_0^\infty \frac{1}{t}K\Bigl(\frac{x}{t}\Bigr)y(t)\,dt = 0.}$

Вид собственных функций этого интегрального уравнения определяется корнями следующего трансцендентного (алгебраического) уравнения относительно параметра λ:

$$\int_0^\infty K\Bigl(\frac{1}{z}\Bigr)z^{\lambda-1}\,dz = 1. \qquad (1)$$

1°. Действительным (однократным) корням λ_n уравнения (1) отвечают собственные функции

$$y_n(x) = x^{\lambda_n}.$$

2°. Действительным корням λ_n кратности r отвечают r собственных функций

$$y_{n1}(x) = x^{\lambda_n}, \quad y_{n2}(x) = x^{\lambda_n} \ln x, \quad \ldots, \quad y_{nr}(x) = x^{\lambda_n} \ln^{r-1} x.$$

3°. Комплексным (однократным) корням $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ уравнения (1) отвечает пара собственных функций

$$y_n^{(1)}(x) = x^{\alpha_n} \cos(\beta_n \ln x), \quad y_n^{(2)}(x) = x^{\alpha_n} \sin(\beta_n \ln x).$$

4°. Комплексным корням $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ кратности r отвечают r пар собственных функций

$$\begin{array}{ll}
y_{n1}^{(1)}(x) = x^{\alpha_n} \cos(\beta_n \ln x), & y_{n1}^{(2)}(x) = x^{\alpha_n} \sin(\beta_n \ln x), \\
y_{n2}^{(1)}(x) = x^{\alpha_n} \ln x \cos(\beta_n \ln x), & y_{n2}^{(2)}(x) = x^{\alpha_n} \ln x \sin(\beta_n \ln x), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_{nr}^{(1)}(x) = x^{\alpha_n} \ln^{r-1} x \cos(\beta_n \ln x), & y_{nr}^{(2)}(x) = x^{\alpha_n} \ln^{r-1} x \sin(\beta_n \ln x).
\end{array}$$

Общее решение представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций однородного интегрального уравнения.

34. $\boldsymbol{y(x) - \int_0^\infty \frac{1}{t} K\Big(\frac{x}{t}\Big) y(t)\, dt = Ax^b.}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B} x^b, \qquad B = 1 - \int_0^\infty K\Big(\frac{1}{\xi}\Big) \xi^{b-1}\, d\xi.$$

Считается, что несобственный интеграл существует и $B \neq 0$. Общее решение рассматриваемого неоднородного интегрального уравнения представляет из себя сумму полученного решения и общего решения однородного интегрального уравнения 4.9.33.

35. $\boldsymbol{y(x) - \int_0^\infty \frac{1}{t} K\Big(\frac{x}{t}\Big) y(t)\, dt = f(x).}$

Решение находится с помощью обратного преобразования Меллина:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\widetilde{f}(s)}{1 - \widetilde{K}(s)} x^{-s}\, ds,$$

где через $\widetilde{f}$ и $\widetilde{K}$ обозначены преобразования Меллина правой части и ядра интегрального уравнения:

$$\widetilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1}\, dx, \quad \widetilde{K}(s) = \int_0^\infty K(x) x^{s-1}\, dx.$$

В частном случае при $f(x) = Ae^{-\lambda x}$, $K(x) = \frac{1}{2} e^{-x}$ решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{4A}{(3 - 2\mathcal{C})(\lambda x)^3} & \text{при } \lambda x > 1, \\[2ex] -2A \displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(\lambda x)^{s_k} \psi(s_k)} & \text{при } \lambda x < 1. \end{cases}$$

Здесь $\mathcal{C} = 0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера, $\psi(z) = [\ln \Gamma(z)]'_z$ — логарифмическая производная гамма-функции, s_k — отрицательные корни трансцендентного уравнения: $\Gamma(s_k) = 2$, где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

⊙ *Литература*: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 146).

36. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b |x-t| g(t) y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x (x-t)g(t)y(t)\,dt + \int_x^b (t-x)g(t)y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по x, имеем

$$y'_x(x) + \int_a^x g(t)y(t)\,dt - \int_x^b g(t)y(t)\,dt = f'_x(x). \tag{2}$$

Дифференцируя (2), приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2g(x)y = f''_{xx}(x). \tag{3}$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < \infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + \int_a^b (t-a)g(t)y(t)\,dt &= f(a), \\ y(b) + \int_a^b (b-t)g(t)y(t)\,dt &= f(b). \end{aligned} \tag{4}$$

Выразим из уравнения (3) произведение $g(x)y$ через y''_{xx} и f''_{xx} и подставим в (4). После интегрирования по частям получим искомые граничные условия для функции $y(x)$:

$$\begin{aligned} y(a) + y(b) + (b-a)[f'_x(b) - y'_x(b)] &= f(a) + f(b), \\ y(a) + y(b) + (a-b)[f'_x(a) - y'_x(a)] &= f(a) + f(b). \end{aligned} \tag{5}$$

Отметим полезное следствие равенств (5):

$$y'_x(a) + y'_x(b) = f'_x(a) + f'_x(b), \tag{6}$$

которое можно использовать вместе с одним из условий (5).

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения. Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

37. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b e^{\lambda|x-t|} g(t) y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)}g(t)y(t)\,dt + \int_x^b e^{\lambda(t-x)}g(t)y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) дважды по x, имеем

$$y''_{xx}(x) + 2\lambda g(x)y(x) + \lambda^2 \int_a^x e^{\lambda(x-t)}g(t)y(t)\,dt + \lambda^2 \int_x^b e^{\lambda(t-x)}g(t)y(t)\,dt = f''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda g(x)y - \lambda^2 y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \tag{3}$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < +\infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + e^{-\lambda a} \int_a^b e^{\lambda t} g(t) y(t)\, dt &= f(a), \\ y(b) + e^{\lambda b} \int_a^b e^{-\lambda t} g(t) y(t)\, dt &= f(b). \end{aligned} \tag{4}$$

Выразим из уравнения (3) произведение $g(x)y$ через y''_{xx} и f''_{xx} и подставим в (4). После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} e^{\lambda b}\varphi'_x(b) - e^{\lambda a}\varphi'_x(a) &= \lambda e^{\lambda a}\varphi(a) + \lambda e^{\lambda b}\varphi(b), \\ e^{-\lambda b}\varphi'_x(b) - e^{-\lambda a}\varphi'_x(a) &= \lambda e^{-\lambda a}\varphi(a) + \lambda e^{-\lambda b}\varphi(b), \end{aligned} \qquad \varphi(x) = y(x) - f(x).$$

Отсюда после некоторых преобразований найдем граничные условия для функции $y(x)$:

$$\varphi'_x(a) + \lambda\varphi(a) = 0, \quad \varphi'_x(b) - \lambda\varphi(b) = 0; \qquad \varphi(x) = y(x) - f(x). \tag{5}$$

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения. Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

38. $y(x) + \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda|x - t|) g(t) y(t)\, dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x - t)] g(t) y(t)\, dt + \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda(t - x)] g(t) y(t)\, dt = f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) дважды по x, имеем

$$\begin{aligned} y''_{xx}(x) + 2\lambda g(x) y(x) + \lambda^2 \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x - t)] g(t) y(t)\, dt \\ + \lambda^2 \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda(t - x)] g(t) y(t)\, dt = f''_{xx}(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda g(x) y - \lambda^2 y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \tag{3}$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < +\infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + \int_a^b \operatorname{sh}[\lambda(t - a)] g(t) y(t)\, dt &= f(a), \\ y(b) + \int_a^b \operatorname{sh}[\lambda(b - t)] g(t) y(t)\, dt &= f(b). \end{aligned} \tag{4}$$

Выразим из уравнения (3) произведение $g(x)y$ через y''_{xx} и f''_{xx} и подставим в (4). После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} &\operatorname{sh}[\lambda(b - a)]\varphi'_x(b) - \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b - a)]\varphi(b) = \lambda\varphi(a), \\ &\operatorname{sh}[\lambda(b - a)]\varphi'_x(a) + \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b - a)]\varphi(a) = -\lambda\varphi(b); \quad \varphi(x) = y(x) - f(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения. Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

39. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \sin(\lambda|x-t|)g(t)y(t)\,dt = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt + \int_x^b \sin[\lambda(t-x)]g(t)y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) дважды по x, имеем

$$\begin{aligned} y''_{xx}(x) + 2\lambda g(x)y(x) - \lambda^2 &\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)y(t)\,dt \\ &- \lambda^2 \int_x^b \sin[\lambda(t-x)]g(t)y(t)\,dt = f''_{xx}(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda g(x)y + \lambda^2 y = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x). \tag{3}$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < +\infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + \int_a^b \sin[\lambda(t-a)]g(t)y(t)\,dt &= f(a), \\ y(b) + \int_a^b \sin[\lambda(b-t)]g(t)y(t)\,dt &= f(b). \end{aligned} \tag{4}$$

Выразим из уравнения (3) произведение $g(x)y$ через y''_{xx} и f''_{xx} и подставим в (4). После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} &\sin[\lambda(b-a)]\varphi'_x(b) - \lambda\cos[\lambda(b-a)]\varphi(b) = \lambda\varphi(a), \\ &\sin[\lambda(b-a)]\varphi'_x(a) + \lambda\cos[\lambda(b-a)]\varphi(a) = -\lambda\varphi(b); \quad \varphi(x) = y(x) - f(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения. Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

4.9-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x,t)y(\cdots)\,dt = F(x)$

40. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t)\,dt = 0.}$

Вид собственных функций этого интегрального уравнения* определяется корнями следующего характеристического (трансцендентного или алгебраического) уравнения относительно параметра μ:

$$\int_a^b f(t)\exp(-\mu t)\,dt = -1. \tag{1}$$

1°. Действительным (однократным) корням μ_k уравнения (1) отвечают собственные функции

$$y_k(x) = \exp(\mu_k x).$$

---

* Аргументы уравнений, содержащих в подынтегральном выражении $y(x-t)$, могут изменяться, например, в следующих пределах: 1) $-\infty < x < \infty$, $-\infty < t < \infty$ при $a = -\infty$, $b = \infty$; 2) $a \leqslant t \leqslant b$, $-\infty \leqslant x < \infty$, где a и b любые, удовлетворяющие условиям $-\infty < a < b < \infty$. Случай 2) следует из случая 1), когда функция $f(t)$ отлична от нуля только на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$.

2°. Действительным корням μ_k кратности r отвечают r собственных функций
$$y_{k1}(x) = \exp(\mu_k x), \quad y_{k2}(x) = x\exp(\mu_k x), \quad \ldots, \quad y_{kr}(x) = x^{r-1}\exp(\mu_k x).$$
3°. Комплексным (однократным) корням $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ уравнения (1) отвечает пара собственных функций
$$y_k^{(1)}(x) = \exp(\alpha_k x)\cos(\beta_k x), \quad y_k^{(2)}(x) = \exp(\alpha_k x)\sin(\beta_k x).$$
4°. Комплексным корням $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ кратности r отвечают r пар собственных функций
$$\begin{aligned}
&y_{k1}^{(1)}(x) = \exp(\alpha_k x)\cos(\beta_k x), && y_{k1}^{(2)}(x) = \exp(\alpha_k x)\sin(\beta_k x),\\
&y_{k2}^{(1)}(x) = x\exp(\alpha_k x)\cos(\beta_k x), && y_{k2}^{(2)}(x) = x\exp(\alpha_k x)\sin(\beta_k x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_{kr}^{(1)}(x) = x^{r-1}\exp(\alpha_k x)\cos(\beta_k x), && y_{kr}^{(2)}(x) = x^{r-1}\exp(\alpha_k x)\sin(\beta_k x).
\end{aligned}$$
Общее решение представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций однородного интегрального уравнения.

► *Для уравнений 4.9.41–4.9.46 приведены только частные решения. Общие решения этих уравнений можно получить, прибавив к частным решениям уравнений общее решение однородного уравнения 4.9.40.*

41. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t)\,dt = Ax + B.}$

Решение:
$$y(x) = px + q,$$
где коэффициенты p и q вычисляются по формулам
$$p = \frac{A}{1+I_0}, \quad q = \frac{AI_1}{(1+I_0)^2} + \frac{B}{1+I_0}, \qquad I_0 = \int_a^b f(t)\,dt, \quad I_1 = \int_a^b tf(t)\,dt.$$

42. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t)\,dt = Ae^{\lambda x}.}$

Решение:
$$y(x) = \frac{A}{B}e^{\lambda x}, \qquad B = 1 + \int_a^b f(t)\exp(-\lambda t)\,dt.$$

43. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t)\,dt = A\sin(\lambda x).}$

Решение:
$$y(x) = \frac{AI_\mathrm{c}}{I_\mathrm{c}^2 + I_\mathrm{s}^2}\sin(\lambda x) + \frac{AI_\mathrm{s}}{I_\mathrm{c}^2 + I_\mathrm{s}^2}\cos(\lambda x),$$
где коэффициенты I_c и I_s вычисляются по формулам
$$I_\mathrm{c} = 1 + \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt, \quad I_\mathrm{s} = \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt.$$

44. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t)\,dt = A\cos(\lambda x).}$

Решение:
$$y(x) = -\frac{AI_\mathrm{s}}{I_\mathrm{c}^2 + I_\mathrm{s}^2}\sin(\lambda x) + \frac{AI_\mathrm{c}}{I_\mathrm{c}^2 + I_\mathrm{s}^2}\cos(\lambda x).$$
где коэффициенты I_c и I_s вычисляются по формулам
$$I_\mathrm{c} = 1 + \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt, \quad I_\mathrm{s} = \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt.$$

45. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t)\,dt = e^{\mu x}(A\sin\lambda x + B\cos\lambda x).}$

Решение:

$$y(x) = e^{\mu x}(p\sin\lambda x + q\cos\lambda x).$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{AI_{\rm c} - BI_{\rm s}}{I_{\rm c}^2 + I_{\rm s}^2}, \qquad q = \frac{AI_{\rm s} + BI_{\rm c}}{I_{\rm c}^2 + I_{\rm s}^2},$$

$$I_{\rm c} = 1 + \int_a^b f(t)e^{-\mu t}\cos(\lambda t)\,dt, \quad I_{\rm s} = \int_a^b f(t)e^{-\mu t}\sin(\lambda t)\,dt.$$

46. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t)\,dt = g(x).}$

1°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k\exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{B_k}\exp(\lambda_k x), \qquad B_k = 1 + \int_a^b f(t)\exp(-\lambda_k t)\,dt.$$

2°. Для полиномиальной правой части уравнения $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x) = e^{\lambda x}\sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n} B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k\cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k\cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^{n} C_k\sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k\sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k\cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^{n} C_k\sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x)\sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x)\sum_{k=0}^{n} B_k x^k + \sin(\lambda x)\sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

7°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

8°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

9°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

10°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^{n} B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^{n} C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

11°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^{n} B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^{n} C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

47. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t) y(x + \beta t)\, dt = Ax + B.}$

Решение*:

$$y(x) = px + q,$$

где

$$p = \frac{A}{1 + I_0}, \quad q = \frac{B}{1 + I_0} - \frac{A I_1 \beta}{(1 + I_0)^2}, \qquad I_0 = \int_a^b f(t)\, dt, \quad I_1 = \int_a^b t f(t)\, dt.$$

48. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t) y(x + \beta t)\, dt = A e^{\lambda x}.}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B} e^{\lambda x}, \qquad B = 1 + \int_a^b f(t) \exp(\lambda \beta t)\, dt.$$

---

* Аргументы уравнений, содержащих в подынтегральном выражении $y(x + \beta t)$, при $\beta > 0$ могут изменяться, например, в следующих пределах: 1) $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant t < \infty$ при $a = 0$, $b = \infty$; 2) $a \leqslant t \leqslant b$, $0 \leqslant x < \infty$, где a и b — любые, удовлетворяющие условиям $0 \leqslant a < b < \infty$. Случай 2) следует из случая 1), когда функция $f(t)$ отлична от нуля только на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$.

49. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t) y(x + \beta t)\, dt = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x.}$

Решение:

$$y(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x,$$

где коэффициенты p и q — вычисляются по формулам

$$p = \frac{AI_{\rm c} + BI_{\rm s}}{I_{\rm c}^2 + I_{\rm s}^2}, \qquad q = \frac{BI_{\rm c} - AI_{\rm s}}{I_{\rm c}^2 + I_{\rm s}^2},$$

$$I_{\rm c} = 1 + \int_a^b f(t) \cos(\lambda \beta t)\, dt, \quad I_{\rm s} = \int_a^b f(t) \sin(\lambda \beta t)\, dt.$$

50. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t) y(x + \beta t)\, dt = g(x).}$

1°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{B_k} \exp(\lambda_k x), \qquad B_k = 1 + \int_a^b f(t) \exp(\beta \lambda_k t)\, dt.$$

2°. Для полиномиальной правой части уравнения $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x) = e^{\lambda x} \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n} B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

7°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

8°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

9°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

10°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^{n} B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^{n} C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

11°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^{n} B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^{n} C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

51. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t) y(xt)\, dt = 0.}$

Вид собственных функций этого интегрального уравнения* определяется корнями следующего трансцендентного (алгебраического) уравнения относительно параметра λ:

$$\int_a^b f(t) t^\lambda \, dt = -1. \tag{1}$$

1°. Действительным (однократным) корням λ_k уравнения (1) отвечают собственные функции:

$$y_k(x) = x^{\lambda_k}.$$

---

* Аргументы уравнений, содержащих в подынтегральном выражении $y(xt)$, могут изменяться в следующих пределах: 1) $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ при $a = 0$, $b = 1$, 2) $1 \leqslant x < \infty$, $1 \leqslant t < \infty$ при $a = 1$, $b = \infty$, 3) $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant t < \infty$ при $a = 0$, $b = \infty$, 4) $a \leqslant t \leqslant b$, $0 \leqslant x < \infty$, где a и b — любые, удовлетворяющие условиям $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$. Случай 4) следует из случая 3), когда функция $f(t)$ отлична от нуля только на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$.

2°. Действительным корням λ_k кратности r отвечают r собственных функций

$$y_{k1}(x) = x^{\lambda_k}, \quad y_{k2}(x) = x^{\lambda_k} \ln x, \quad \ldots, \quad y_{kr}(x) = x^{\lambda_k} \ln^{r-1} x.$$

3°. Комплексным (однократным) корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ уравнения (1) отвечает пара собственных функций

$$y_k^{(1)}(x) = x^{\alpha_k} \cos(\beta_k \ln x), \quad y_k^{(2)}(x) = x^{\alpha_k} \sin(\beta_k \ln x).$$

4°. Комплексным корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ кратности r отвечают r пар собственных функций

$$\begin{array}{ll} y_{k1}^{(1)}(x) = x^{\alpha_k} \cos(\beta_k \ln x), & y_{k1}^{(2)}(x) = x^{\alpha_k} \sin(\beta_k \ln x), \\ y_{k2}^{(1)}(x) = x^{\alpha_k} \ln x \cos(\beta_k \ln x), & y_{k2}^{(2)}(x) = x^{\alpha_k} \ln x \sin(\beta_k \ln x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{kr}^{(1)}(x) = x^{\alpha_k} \ln^{r-1} x \cos(\beta_k \ln x), & y_{kr}^{(2)}(x) = x^{\alpha_k} \ln^{r-1} x \sin(\beta_k \ln x). \end{array}$$

Общее решение представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций однородного интегрального уравнения.

► *Для уравнений 4.9.52–4.9.58 приведены только частные решения. Общие решения этих уравнений можно получить, прибавив к частным решениям уравнений общее решение однородного уравнения 4.9.51.*

52. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t) y(xt)\, dt = Ax + B.}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{1 + I_1} x + \frac{B}{1 + I_0}, \qquad I_0 = \int_a^b f(t)\, dt, \quad I_1 = \int_a^b t f(t)\, dt.$$

53. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t) y(xt)\, dt = Ax^\beta.}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B} x^\beta, \qquad B = 1 + \int_a^b f(t) t^\beta\, dt.$$

54. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t) y(xt)\, dt = A \ln x + B.}$

Решение:

$$y(x) = p \ln x + q,$$

где

$$p = \frac{A}{1 + I_0}, \quad q = \frac{B}{1 + I_0} - \frac{A I_l}{(1 + I_0)^2}, \qquad I_0 = \int_a^b f(t)\, dt, \quad I_l = \int_a^b f(t) \ln t\, dt.$$

55. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t) y(xt)\, dt = Ax^\beta \ln x.}$

Решение:

$$y(x) = p x^\beta \ln x + q x^\beta,$$

где

$$p = \frac{A}{1 + I_1}, \quad q = -\frac{A I_2}{(1 + I_1)^2}, \qquad I_1 = \int_a^b f(t) t^\beta\, dt, \quad I_2 = \int_a^b f(t) t^\beta \ln t\, dt.$$

56. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t) y(xt)\, dt = A\cos(\ln x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{AI_{\rm c}}{I_{\rm c}^2 + I_{\rm s}^2}\cos(\ln x) + \frac{AI_{\rm s}}{I_{\rm c}^2 + I_{\rm s}^2}\sin(\ln x),$$

$$I_{\rm c} = 1 + \int_a^b f(t)\cos(\ln t)\, dt, \quad I_{\rm s} = \int_a^b f(t)\sin(\ln t)\, dt.$$

57. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t) y(xt)\, dt = A\sin(\ln x).}$

Решение:

$$y(x) = -\frac{AI_{\rm s}}{I_{\rm c}^2 + I_{\rm s}^2}\cos(\ln x) + \frac{AI_{\rm c}}{I_{\rm c}^2 + I_{\rm s}^2}\sin(\ln x),$$

$$I_{\rm c} = 1 + \int_a^b f(t)\cos(\ln t)\, dt, \quad I_{\rm s} = \int_a^b f(t)\sin(\ln t)\, dt.$$

58. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t) y(xt)\, dt = Ax^\beta \cos(\lambda \ln x) + Bx^\beta \sin(\lambda \ln x).}$

Решение:

$$y(x) = px^\beta \cos(\lambda \ln x) + qx^\beta \sin(\lambda \ln x),$$

где

$$p = \frac{AI_{\rm c} - BI_{\rm s}}{I_{\rm c}^2 + I_{\rm s}^2}, \quad q = \frac{AI_{\rm s} + BI_{\rm c}}{I_{\rm c}^2 + I_{\rm s}^2},$$

$$I_{\rm c} = 1 + \int_a^b f(t) t^\beta \cos(\lambda \ln t)\, dt, \quad I_{\rm s} = \int_a^b f(t) t^\beta \sin(\lambda \ln t)\, dt.$$

59. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t) y(\xi)\, dt = 0, \qquad \xi = x\varphi(t).}$

Вид собственных функций этого интегрального уравнения определяется корнями следующего трансцендентного (алгебраического) уравнения относительно параметра λ:

$$\int_a^b f(t)[\varphi(t)]^\lambda\, dt = -1. \tag{1}$$

1°. Действительным (однократным) корням λ_k уравнения (1) отвечают собственные функции:

$$y_k(x) = x^{\lambda_k}.$$

2°. Действительным корням λ_k кратности r отвечают r собственных функций:

$$y_{k1}(x) = x^{\lambda_k}, \quad y_{k2}(x) = x^{\lambda_k}\ln x, \quad \ldots, \quad y_{kr}(x) = x^{\lambda_k}\ln^{r-1} x.$$

3°. Комплексным (однократным) корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ уравнения (1) отвечает пара собственных функций:

$$y_k^{(1)}(x) = x^{\alpha_k}\cos(\beta_k \ln x), \quad y_k^{(2)}(x) = x^{\alpha_k}\sin(\beta_k \ln x).$$

4°. Комплексным корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ кратности r отвечают r пар собственных функций:

$$\begin{array}{ll}
y_{k1}^{(1)}(x) = x^{\alpha_k}\cos(\beta_k \ln x), & y_{k1}^{(2)}(x) = x^{\alpha_k}\sin(\beta_k \ln x),\\
y_{k2}^{(1)}(x) = x^{\alpha_k}\ln x\cos(\beta_k \ln x), & y_{k2}^{(2)}(x) = x^{\alpha_k}\ln x\sin(\beta_k \ln x),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_{kr}^{(1)}(x) = x^{\alpha_k}\ln^{r-1} x\cos(\beta_k \ln x), & y_{kr}^{(2)}(x) = x^{\alpha_k}\ln^{r-1} x\sin(\beta_k \ln x).
\end{array}$$

Общее решение представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций однородного интегрального уравнения.

60. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(\xi)\,dt = Ax^\beta, \qquad \xi = x\varphi(t).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B}x^\beta, \qquad B = 1 + \int_a^b f(t)[\varphi(t)]^\beta\,dt.$$

Считается, что $B \neq 0$. К решению (1) может быть добавлена линейная комбинация из собственных функций соответствующего однородного уравнения (см. 4.9.59).

61. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(\xi)\,dt = g(x), \qquad \xi = x\varphi(t).}$

1°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{B_k}x^k, \qquad B_k = 1 + \int_a^b f(t)[\varphi(t)]^k\,dt. \tag{1}$$

2°. Для правой части уравнения $g(x) = \ln x \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \ln x \sum_{k=0}^{n} B_k x^k + \sum_{k=0}^{n} C_k x^k, \tag{2}$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k (\ln x)^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k (\ln x)^k, \tag{3}$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos(\lambda_k \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k \ln x) + \sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k \ln x), \tag{4}$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin(\lambda_k \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k \ln x) + \sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k \ln x), \tag{5}$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

Замечание. К решениям (1)–(5) может быть добавлена линейная комбинация из собственных функций соответствующего однородного уравнения (см. 4.9.59).

4.10. Некоторые формулы и преобразования

Пусть решение интегрального уравнения

$$y(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = f(x) \tag{1}$$

имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^b R(x,t)f(t)\,dt. \tag{2}$$

Тогда решение более сложного интегрального уравнения

$$y(x) + \int_a^b K(x,t)\,\frac{g(x)}{g(t)}\,y(t)\,dt = f(x) \qquad (3)$$

дается формулой

$$y(x) = f(x) + \int_a^b R(x,t)\,\frac{g(x)}{g(t)}\,f(t)\,dt. \qquad (4)$$

Ниже приведены формулы для определения решений интегральных уравнений вида (3) для некоторых конкретных функций $g(x)$. Во всех случаях считается, что решение уравнения (1) известно и дается выражением (2).

1°. Решение уравнения

$$y(x) + \int_a^b K(x,t)(x/t)^{\lambda} y(t)\,dt = f(x)$$

имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^b R(x,t)(x/t)^{\lambda} f(t)\,dt.$$

2°. Решение уравнения

$$y(x) + \int_a^b K(x,t)e^{\lambda(x-t)} y(t)\,dt = f(x)$$

имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^b R(x,t)e^{\lambda(x-t)} f(t)\,dt.$$

5. Нелинейные уравнения с переменным пределом интегрирования

► ***Обозначения:*** *f, g, h, φ — произвольные функции сложных аргументов, указанных в круглых скобках после знака функции (аргумент может зависеть от t, x, y); A, B, C, a, b, c, k, β, λ, μ — произвольные параметры.*

5.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные параметры

5.1-1. Уравнения вида $\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = F(x)$

1. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = Ax + B, \qquad A, B > 0.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{B}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\exp\!\Big(-\frac{A}{B}x\Big) + \sqrt{\frac{A}{B}}\,\operatorname{erf}\!\Big(\sqrt{\frac{A}{B}\,x}\Big)\right],$$

где $\operatorname{erf} z = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z \exp\!\big(-t^2\big)\,dt$ — интеграл вероятностей.

2. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A^2x^\lambda.$

Решения:

$$y(x) = \pm A\frac{\sqrt{\Gamma(\lambda+1)}}{\Gamma\big(\frac{\lambda+1}{2}\big)}x^{\frac{\lambda-1}{2}},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

3. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = Ax^{\lambda-1} + Bx^\lambda, \qquad \lambda > 0.$

Решения:

$$y(x) = \pm\frac{\sqrt{A\Gamma(\lambda)}}{\Gamma(\lambda/2)}x^{\frac{\lambda-2}{2}}\exp\!\Big(-\lambda\frac{B}{A}\,x\Big)\Phi\Big(\frac{\lambda+1}{2},\ \frac{\lambda}{2};\ \lambda\frac{B}{A}\,x\Big),$$

где $\Phi(a, c; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера).

4. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A^2e^{\lambda x}.$

Решения: $y(x) = \pm\dfrac{A}{\sqrt{\pi x}}e^{\lambda x}.$

5. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = (Ax+B)e^{\lambda x}, \qquad A, B > 0.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{B}\,e^{\lambda x}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\exp\!\Big(-\frac{A}{B}x\Big) + \sqrt{\frac{A}{B}}\,\operatorname{erf}\!\Big(\sqrt{\frac{A}{B}\,x}\Big)\right],$$

где $\operatorname{erf} z = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z \exp\!\big(-t^2\big)\,dt$ — интеграл вероятностей.

6. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A^2x^\mu e^{\lambda x}.$

Решения:
$$y(x) = \pm\frac{A\sqrt{\Gamma(\mu+1)}}{\Gamma\bigl(\frac{\mu+1}{2}\bigr)}x^{\frac{\mu-1}{2}}e^{\lambda x}.$$

7. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = \bigl(Ax^{\mu-1}+Bx^\mu\bigr)e^{\lambda x}.$

Решения:
$$y(x) = \pm\frac{\sqrt{A\Gamma(\mu)}}{\Gamma(\mu/2)}x^{\frac{\mu-2}{2}}\exp\Bigl[\Bigl(\lambda-\mu\frac{B}{A}\Bigr)x\Bigr]\Phi\Bigl(\frac{\mu+1}{2},\ \frac{\mu}{2};\ \mu\frac{B}{A}x\Bigr).$$

8. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A^2\operatorname{ch}(\lambda x).$

Решения:
$$y(x) = \pm\frac{A}{\sqrt{\pi}}\,\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{I_0(\lambda t)\,dt}{\sqrt{x-t}},$$
где I_0 — модифицированная функция Бесселя.

9. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda x).$

Решения:
$$y = \pm\sqrt{A\lambda}\,I_0(\lambda x),$$
где I_0 — модифицированная функция Бесселя.

10. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda\sqrt{x}\,).$

Решения:
$$y = \pm\sqrt{A}\,\pi^{1/4}2^{-7/8}\lambda^{3/4}x^{-1/8}I_{-1/4}\Bigl(\lambda\sqrt{\tfrac{1}{2}x}\,\Bigr),$$
где $I_{-1/4}$ — модифицированная функция Бесселя.

11. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A^2\cos(\lambda x).$

Решения:
$$y(x) = \pm\frac{A}{\sqrt{\pi}}\,\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{J_0(\lambda t)\,dt}{\sqrt{x-t}},$$
где J_0 — функция Бесселя.

12. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A\sin(\lambda x).$

Решения:
$$y = \pm\sqrt{A\lambda}\,J_0(\lambda x),$$
где J_0 — функция Бесселя.

13. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A\sin(\lambda\sqrt{x}\,).$

Решения:
$$y = \pm\sqrt{A}\,\pi^{1/4}2^{-7/8}\lambda^{3/4}x^{-1/8}J_{-1/4}\Bigl(\lambda\sqrt{\tfrac{1}{2}x}\,\Bigr),$$
где $J_{-1/4}$ — функция Бесселя.

14. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A^2 e^{\mu x}\operatorname{ch}(\lambda x)$.

Решения:

$$y(x) = \pm\frac{A}{\sqrt{\pi}}\,e^{\mu x}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{I_0(\lambda t)\,dt}{\sqrt{x-t}},$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя.

15. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = Ae^{\mu x}\operatorname{sh}(\lambda x)$.

Решения:

$$y = \pm\sqrt{A\lambda}\,e^{\mu x}I_0(\lambda x),$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя.

16. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = A^2 e^{\mu x}\cos(\lambda x)$.

Решения:

$$y(x) = \pm\frac{A}{\sqrt{\pi}}e^{\mu x}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{J_0(\lambda t)\,dt}{\sqrt{x-t}},$$

где J_0 — функция Бесселя.

17. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = Ae^{\mu x}\sin(\lambda x)$.

Решения:

$$y = \pm\sqrt{A\lambda}\,e^{\mu x}J_0(\lambda x),$$

где J_0 — функция Бесселя.

5.1-2. Уравнения вида $\int_0^x K(x,t)y(t)y(x-t)\,dt = F(x)$

18. $\displaystyle\int_0^x t^k y(t)y(x-t)\,dt = Ax^\lambda, \qquad A>0$.

Решения:

$$y(x) = \pm\left[\frac{A\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\bigl(\frac{\lambda+1+k}{2}\bigr)\Gamma\bigl(\frac{\lambda+1-k}{2}\bigr)}\right]^{1/2} x^{\frac{\lambda-k-1}{2}},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

19. $\displaystyle\int_0^x t^k y(t)y(x-t)\,dt = Ae^{\lambda x}$.

Решения:

$$y(x) = \pm\left[\frac{A}{\Gamma\bigl(\frac{k+1}{2}\bigr)\Gamma\bigl(\frac{1-k}{2}\bigr)}\right]^{1/2} x^{-\frac{k+1}{2}}e^{\lambda x},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

20. $\displaystyle\int_0^x t^k y(t)y(x-t)\,dt = Ax^\mu e^{\lambda x}$.

Решения:

$$y(x) = \pm\left[\frac{A\Gamma(\mu+1)}{\Gamma\bigl(\frac{\mu+k+1}{2}\bigr)\Gamma\bigl(\frac{\mu-k+1}{2}\bigr)}\right]^{1/2} x^{\frac{\mu-k-1}{2}}e^{\lambda x},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

21. $\displaystyle\int_0^x \frac{y(t)y(x-t)}{ax+bt}\,dt = Ax^\lambda.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,x^{\lambda/2}, \qquad I = \int_0^1 z^{\lambda/2}(1-z)^{\lambda/2}\frac{dz}{a+bz}.$$

22. $\displaystyle\int_0^x \frac{y(t)y(x-t)}{ax+bt}\,dt = Ae^{\lambda x}.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,e^{\lambda x}, \qquad I = \frac{1}{b}\ln\Bigl(1+\frac{b}{a}\Bigr).$$

23. $\displaystyle\int_0^x \frac{y(t)y(x-t)}{ax+bt}\,dt = Ax^\mu e^{\lambda x}.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,x^{\mu/2}e^{\lambda x}, \qquad I = \int_0^1 z^{\mu/2}(1-z)^{\mu/2}\frac{dz}{a+bz}.$$

24. $\displaystyle\int_0^x \frac{y(t)y(x-t)}{\sqrt{ax^2+bt^2}}\,dt = Ax^\lambda.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,x^{\lambda/2}, \qquad I = \int_0^1 z^{\lambda/2}(1-z)^{\lambda/2}\frac{dz}{\sqrt{a+bz^2}}.$$

25. $\displaystyle\int_0^x \frac{y(t)y(x-t)}{\sqrt{ax^2+bt^2}}\,dt = Ae^{\lambda x}.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,e^{\lambda x}, \qquad I = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{a+bz^2}}.$$

26. $\displaystyle\int_0^x \frac{y(t)y(x-t)}{\sqrt{ax^2+bt^2}}\,dt = Ax^\mu e^{\lambda x}.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,x^{\mu/2}e^{\lambda x}, \qquad I = \int_0^1 z^{\mu/2}(1-z)^{\mu/2}\frac{dz}{\sqrt{a+bz^2}}.$$

5.1-3. Уравнения вида $\int_0^x G(\cdots)\,dt = F(x)$

27. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(ax+bt)\,dt = Ax^\lambda.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,x^{\frac{\lambda-1}{2}}, \qquad I = \int_0^1 z^{\frac{\lambda-1}{2}}(a+bz)^{\frac{\lambda-1}{2}}\,dz.$$

28. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(ax-t)\,dt = Ae^{\lambda x}, \qquad a \geqslant 1.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,\frac{\exp(\lambda x/a)}{\sqrt{x}}, \qquad I = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(a-z)}}.$$

29. $\displaystyle\int_0^x y(t)y(ax-t)\,dt = Ax^\mu e^{\lambda x}, \qquad a \geqslant 1.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,x^{\frac{\mu-1}{2}}\exp(\lambda x/a), \qquad I = \int_0^1 z^{\frac{\mu-1}{2}}(a-z)^{\frac{\mu-1}{2}}\,dz.$$

5.1-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x,t)y^2(t)\,dt = F(x)$

30. $\displaystyle y(x) + A\int_a^x y^2(t)\,dt = Bx + C.$

Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

1°. Решение при $AB > 0$:

$$y(x) = k\frac{(k+y_a)\exp[2Ak(x-a)] + y_a - k}{(k+y_a)\exp[2Ak(x-a)] - y_a + k}, \qquad k = \sqrt{\frac{B}{A}}, \quad y_a = aB + C.$$

2°. Решение при $AB < 0$:

$$y(x) = k\,\mathrm{tg}\Big[Ak(a-x) + \mathrm{arctg}\,\frac{y_a}{k}\Big], \qquad k = \sqrt{-\frac{B}{A}}, \quad y_a = aB + C.$$

3°. Решение при $B = 0$:

$$y(x) = \frac{C}{AC(x-a)+1}.$$

31. $\displaystyle y(x) + k\int_a^x (x-t)y^2(t)\,dt = Ax^2 + Bx + C.$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = ky^2$.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y \big[4Au - 2kF(u) + B^2 - 4AC\big]^{-1/2}\,du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \tfrac{1}{3}\big(u^3 - y_0^3\big), \quad y_0 = Aa^2 + Ba + C.$$

32. $\displaystyle y(x) + A\int_a^x t^\lambda y^2(t)\,dt = Bx^{\lambda+1} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = Ay^2$. Это интегральное уравнение сводится к к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$(\lambda+1)\int_{y_a}^y \frac{du}{Au^2 - B(\lambda+1)} + x^{\lambda+1} - a^{\lambda+1} = 0, \qquad y_a = Ba^{\lambda+1} + C.$$

33. $\displaystyle y(x) + A\int_0^x x^{-\lambda-1}y^2(t)\,dt = Bx^\lambda, \qquad \lambda > -\tfrac{1}{2}.$

Решения: $y_1(x) = \beta_1 x^\lambda$ и $y_2(x) = \beta_2 x^\lambda$, где $\beta_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $A\beta^2 + (2\lambda+1)\beta - B(2\lambda+1) = 0$.

34. $\displaystyle y(x) + \int_0^x \frac{y^2(t)\,dt}{ax+bt} = A.$

Решения: $y_1(x) = \lambda_1$ и $y_2(x) = \lambda_2$, где $\lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $\ln\Big(1+\dfrac{b}{a}\Big)\lambda^2 + b\lambda - Ab = 0$.

35. $\boldsymbol{y(x)+A\int_0^x \frac{y^2(t)\,dt}{x^2+t^2}=Bx.}$

Решения: $y_1(x)=\lambda_1 x$ и $y_2(x)=\lambda_2 x$, где $\lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $\left(1-\frac{1}{4}\pi\right)A\lambda^2+\lambda-B=0$.

36. $\boldsymbol{y(x)+\int_0^x \frac{y^2(t)\,dt}{\sqrt{ax^2+bt^2}}=A.}$

Решения: $y_1(x)=\lambda_1$ и $y_2(x)=\lambda_2$, где $\lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$I\lambda^2+\lambda-A=0,\qquad I=\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{a+bz^2}}.$$

37. $\boldsymbol{y(x)+A\int_0^x \left(ax^n+bt^n\right)^{-\frac{\lambda+1}{n}}y^2(t)\,dt=Bx^\lambda.}$

Решения: $y_1(x)=\beta_1 x^\lambda$ и $y_2(x)=\beta_2 x^\lambda$, где $\beta_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$AI\beta^2+\beta-B=0,\qquad I=\int_0^1 z^{2\lambda}\left(a+bz^n\right)^{-\frac{\lambda+1}{n}}dz.$$

38. $\boldsymbol{y(x)+A\int_a^x e^{\lambda t}y^2(t)\,dt=Be^{\lambda x}+C.}$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y)=Ay^2$. Это интегральное уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$\lambda\int_{y_0}^y \frac{du}{Au^2-B\lambda}+e^{\lambda x}-e^{\lambda a}=0,\qquad y_0=Be^{\lambda a}+C.$$

39. $\boldsymbol{y(x)+A\int_a^x e^{\lambda(x-t)}y^2(t)\,dt=B.}$

Частный случай уравнения 5.8.12. Это интегральное уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$y'_x+Ay^2-\lambda y+\lambda B=0,\qquad y(a)=B.$$

Решение в неявном виде:

$$\int_B^y \frac{du}{Au^2-\lambda u+\lambda B}+x-a=0.$$

40. $\boldsymbol{y(x)+k\int_a^x e^{\lambda(x-t)}y^2(t)\,dt=Ae^{\lambda x}+B.}$

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y \frac{du}{\lambda u-ku^2-\lambda B}=x-a,\qquad y_0=Ae^{\lambda a}+B.$$

41. $\boldsymbol{y(x)+k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]y^2(t)\,dt=Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x}+C.}$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y)=ky^2$.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y \left[\lambda^2u^2-2\lambda^2Cu-2k\lambda F(u)+\lambda^2(C^2-4AB)\right]^{-1/2}du=\pm(x-a),$$

$$F(u)=\tfrac{1}{3}\left(u^3-y_0^3\right),\quad y_0=Ae^{\lambda a}+Be^{-\lambda a}+C.$$

42. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]y^2(t)\,dt = A\operatorname{ch}(\lambda x) + B.}$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = ky^2$.
Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^{y} \bigl[\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 Bu - 2k\lambda F(u) + \lambda^2(B^2 - A^2)\bigr]^{-1/2}\,du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \tfrac{1}{3}\bigl(u^3 - y_0^3\bigr), \quad y_0 = A\operatorname{ch}(\lambda a) + B.$$

43. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]y^2(t)\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda x) + B.}$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = ky^2$.
Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^{y} \bigl[\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 Bu - 2k\lambda F(u) + \lambda^2(A^2 + B^2)\bigr]^{-1/2}\,du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \tfrac{1}{3}\bigl(u^3 - y_0^3\bigr), \quad y_0 = A\operatorname{sh}(\lambda a) + B.$$

44. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]y^2(t)\,dt = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C.}$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = ky^2$.
Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^{y} \bigl[\lambda^2 D - \lambda^2 u^2 + 2\lambda^2 Cu - 2k\lambda F(u)\bigr]^{-1/2}\,du = \pm(x-a),$$

$$y_0 = A\sin(\lambda a) + B\cos(\lambda a) + C, \quad D = A^2 + B^2 - C^2, \quad F(u) = \tfrac{1}{3}\bigl(u^3 - y_0^3\bigr).$$

5.1-5. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)y(x-t)\,dt = F(x)$

45. $\boldsymbol{y(x) + A\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = AB^2x + B.}$

Решение: $y(x) = B$.

46. $\boldsymbol{y(x) + A\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = (AB^2x + B)e^{\lambda x}.}$

Решение: $y(x) = Be^{\lambda x}$.

47. $\boldsymbol{y(x) + \frac{\lambda}{2\beta}\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = \frac{1}{2}\beta\operatorname{sh}(\lambda x).}$

Решение: $y(x) = \beta I_1(\lambda x)$, где $I_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя.

48. $\boldsymbol{y(x) - \frac{\lambda}{2\beta}\int_0^x y(t)y(x-t)\,dt = \frac{1}{2}\beta\sin(\lambda x).}$

Решение: $y(x) = \beta J_1(\lambda x)$, где $J_1(x)$ — функция Бесселя.

49. $\boldsymbol{y(x) + A\int_0^x x^{-\lambda-1}y(t)y(x-t)\,dt = Bx^{\lambda}.}$

Решения: $y_1(x) = \beta_1 x^{\lambda}$ и $y_2(x) = \beta_2 x^{\lambda}$, где $\beta_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$AI\beta^2 + \beta - B = 0, \qquad I = \int_0^1 z^{\lambda}(1-z)^{\lambda}dz = \frac{\Gamma^2(\lambda+1)}{\Gamma(2\lambda+2)}.$$

5.2. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные функции

5.2-1. Уравнения вида $\int_a^x G(\cdots)\,dt = F(x)$

1. $\displaystyle\int_a^x K(x,t)y^2(t)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = y^2(x)$ приводит к линейному уравнению

$$\int_a^x K(x,t)w(t)\,dt = f(x).$$

2. $\displaystyle\int_a^x K(t)y(x)y(t)\,dt = f(x).$

Решения:

$$y(x) = \pm f(x)\left[2\int_a^x K(t)f(t)\,dt\right]^{-1/2}.$$

3. $\displaystyle\int_0^x f\left(\frac{t}{x}\right)y(t)y(x-t)\,dt = Ax^\lambda.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,x^{\frac{\lambda-1}{2}}, \qquad I = \int_0^1 f(z)z^{\frac{\lambda-1}{2}}(1-z)^{\frac{\lambda-1}{2}}\,dz.$$

4. $\displaystyle\int_0^x f\left(\frac{t}{x}\right)y(t)y(x-t)\,dt = Ae^{\lambda x}.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,\frac{e^{\lambda x}}{\sqrt{x}}, \qquad I = \int_0^1 \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{z(1-z)}}.$$

5. $\displaystyle\int_0^x f\left(\frac{t}{x}\right)y(t)y(x-t)\,dt = Ax^\mu e^{\lambda x}.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,x^{\frac{\mu-1}{2}}e^{\lambda x}, \qquad I = \int_0^1 f(z)z^{\frac{\mu-1}{2}}(1-z)^{\frac{\mu-1}{2}}\,dz.$$

6. $\displaystyle\int_0^x f\left(\frac{t}{x}\right)y(t)y(ax+bt)\,dt = Ax^\lambda.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,x^{\frac{\lambda-1}{2}}, \qquad I = \int_0^1 f(z)z^{\frac{\lambda-1}{2}}(a+bz)^{\frac{\lambda-1}{2}}\,dz.$$

7. $\displaystyle\int_0^x f\left(\frac{t}{x}\right)y(t)y(ax-t)\,dt = Ae^{\lambda x}, \qquad a \geqslant 1.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,\frac{\exp(\lambda x/a)}{\sqrt{x}}, \qquad I = \int_0^1 \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{z(a-z)}}.$$

8. $\displaystyle\int_0^x f\left(\frac{t}{x}\right) y(t)y(ax-t)\,dt = Ax^\mu e^{\lambda x}, \qquad a \geqslant 1.$

Решения:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{I}}\,x^{\frac{\mu-1}{2}}\exp(\lambda x/a), \qquad I = \int_0^1 f(z)z^{\frac{\mu-1}{2}}(a-z)^{\frac{\mu-1}{2}}\,dz.$$

5.2-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x,t)y^2(t)\,dt = F(x)$

9. $\displaystyle y(x) + \int_a^x f(t)y^2(t)\,dt = A.$

Решение:

$$y(x) = A\left[1 + A\int_a^x f(t)\,dt\right]^{-1}.$$

10. $\displaystyle y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)} g(t)y^2(t)\,dt = f(x).$

Дифференцируя уравнение по x, имеем

$$y'_x + g(x)y^2 + \lambda\int_a^x e^{\lambda(x-t)}g(t)y^2(t)\,dt = f'_x(x). \tag{1}$$

Исключая отсюда интегральный член с помощью исходного уравнения, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению Риккати

$$y'_x + g(x)y^2 - \lambda y + \lambda f(x) - f'_x(x) = 0 \tag{2}$$

с начальным условием $y(a) = f(a)$. Уравнение (2) сводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Для различных конкретных функций f и g точные решения уравнения (2) приведены, например, в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

11. $\displaystyle y(x) + \int_a^x g(x)h(t)y^2(t)\,dt = f(x).$

Дифференцируя уравнение по x, имеем

$$y'_x + g(x)h(x)y^2 + g'_x(x)\int_a^x h(t)y^2(t)\,dt = f'_x(x). \tag{1}$$

Исключая отсюда интегральный член с помощью исходного уравнения, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению Риккати

$$y'_x + g(x)h(x)y^2 - \frac{g'_x(x)}{g(x)}y = f'_x(x) - \frac{g'_x(x)}{g(x)}f(x) \tag{2}$$

с начальным условием $y(a) = f(a)$. Уравнение (2) сводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Для различных конкретных функций f, g и h точные решения уравнения (2) приведены, например, в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

12. $\displaystyle y(x) + \int_0^x x^{-\lambda-1} f\left(\frac{t}{x}\right) y^2(t)\,dt = Ax^\lambda.$

Решения: $y_1(x) = \beta_1 x^\lambda$ и $y_2(x) = \beta_2 x^\lambda$, где $\beta_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$I\beta^2 + \beta - A = 0, \qquad I = \int_0^1 f(z)z^{2\lambda}\,dz.$$

13. $y(x) - \int_{-\infty}^{x} e^{\lambda t+\beta x} f(x-t) y^2(t)\, dt = 0.$

Частный случай уравнения 5.3.19 при $k = 2$.

14. $y(x) - \int_{x}^{\infty} e^{\lambda t+\beta x} f(x-t) y^2(t)\, dt = 0.$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A} e^{-(\lambda+\beta)x}, \qquad A = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+2\beta)z} f(-z)\, dz.$$

5.2-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x G(\cdots)\, dt = F(x)$

15. $y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) y(x-t)\, dt = Ae^{\lambda x}.$

Решения:

$$y_1(x) = B_1 e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = B_2 e^{\lambda x},$$

где B_1 и B_2 — корни квадратного уравнения

$$IB^2 + B - A = 0, \qquad I = \int_0^1 f(z)\, dz.$$

16. $y(x) + A\int_0^x x^{-\lambda-1} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) y(x-t)\, dt = Bx^{\lambda}.$

Решения: $y_1(x) = \beta_1 x^{\lambda}$ и $y_2(x) = \beta_2 x^{\lambda}$, где $\beta_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$AI\beta^2 + \beta - B = 0, \qquad I = \int_0^1 f(z) z^{\lambda} (1-z)^{\lambda} dz.$$

17. $y(x) + \int_x^{\infty} f(t-x) y(t-x) y(t)\, dt = ae^{-\lambda x}.$

Решения: $y(x) = b_k e^{-\lambda x}$, где b_k $(k = 1, 2)$ — корни квадратного уравнения

$$b^2 I + b - a = 0, \qquad I = \int_0^{\infty} f(z) e^{-2\lambda z}\, dz.$$

Для вычисления интеграла I удобно использовать таблицы преобразований Лапласа с параметром $p = 2\lambda$.

5.3. Уравнения со степенной нелинейностью

5.3-1. Уравнения содержат произвольные параметры

1. $y(x) + A\int_a^x t^{\lambda} y^k(t)\, dt = Bx^{\lambda+1} + C.$

Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$(\lambda+1)\int_{y_0}^{y} \frac{du}{Au^k - B(\lambda+1)} + x^{\lambda+1} - a^{\lambda+1} = 0, \qquad y_0 = Ba^{\lambda+1} + C.$$

2. $\boldsymbol{y(x) + \int_0^x \frac{y^k(t)}{ax+bt}\,dt = A.}$

Решение: $y(x) = \lambda$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\ln\Bigl(1 + \frac{b}{a}\Bigr)\lambda^k + b\lambda - Ab = 0.$$

3. $\boldsymbol{y(x) + Ax\int_0^x \frac{y^k(t)\,dt}{x^2+t^2} = B.}$

Решение: $y(x) = \lambda$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda + \tfrac{1}{4}A\pi\lambda^k = B.$$

4. $\boldsymbol{y(x) + \int_0^x \frac{y^k(t)\,dt}{\sqrt{ax^2+bt^2}} = A.}$

Решение: $y(x) = \lambda$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$I\lambda^k + \lambda - A = 0, \qquad I = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{a+bz^2}}.$$

5. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \bigl(ax^n + bt^n\bigr)^{\frac{\lambda-k\lambda-1}{n}} y^k(t)\,dt = Bx^\lambda.}$

Решение: $y = \beta x^\lambda$, где β — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$AI\beta^k + \beta - B = 0, \qquad I = \int_0^1 z^{k\lambda}\bigl(a + bz^n\bigr)^{\frac{\lambda-k\lambda-1}{n}}\,dz.$$

6. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x e^{\lambda t} y^\mu(t)\,dt = Be^{\lambda x} + C.}$

Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$\lambda\int_{y_0}^{y} \frac{du}{Au^\mu - B\lambda} + e^{\lambda x} - e^{\lambda a} = 0, \qquad y_0 = Be^{\lambda a} + C.$$

7. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)} y^\mu(t)\,dt = Ae^{\lambda x} + B.}$

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{\lambda t - kt^\mu - \lambda B} = x - a, \qquad y_0 = Ae^{\lambda a} + B.$$

8. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)]y^\mu(t)\,dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.}$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = ky^\mu$.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^{y} \bigl[\lambda^2u^2 - 2\lambda^2Cu - 2k\lambda F(u) + \lambda^2(C^2 - 4AB)\bigr]^{-1/2}\,du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \frac{1}{\mu+1}\bigl(u^{\mu+1} - y_0^{\mu+1}\bigr), \quad y_0 = Ae^{\lambda a} + Be^{-\lambda a} + C.$$

9. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]y^{\mu}(t)\,dt = A\operatorname{ch}(\lambda x) + B.}$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = ky^{\mu}$.
Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^{y} \bigl[\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 Bu - 2k\lambda F(u) + \lambda^2(B^2 - A^2)\bigr]^{-1/2}\,du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \frac{1}{\mu+1}\bigl(u^{\mu+1} - y_0^{\mu+1}\bigr), \quad y_0 = A\operatorname{ch}(\lambda a) + B.$$

10. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]y^{\mu}(t)\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda x) + B.}$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = ky^{\mu}$.
Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^{y} \bigl[\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 Bu - 2k\lambda F(u) + \lambda^2(A^2 + B^2)\bigr]^{-1/2}\,du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \frac{1}{\mu+1}\bigl(u^{\mu+1} - y_0^{\mu+1}\bigr), \quad y_0 = A\operatorname{sh}(\lambda a) + B.$$

11. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]y^{\mu}(t)\,dt = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C.}$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = ky^{\mu}$.
Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^{y} \bigl[\lambda^2 D - \lambda^2 u^2 + 2\lambda^2 Cu - 2k\lambda F(u)\bigr]^{-1/2}\,du = \pm(x-a),$$

$$y_0 = A\sin(\lambda a) + B\cos(\lambda a) + C, \quad D = A^2 + B^2 - C^2, \quad F(u) = \frac{1}{\mu+1}\bigl(u^{\mu+1} - y_0^{\mu+1}\bigr).$$

5.3-2. Уравнения содержат произвольные функции

12. $\boldsymbol{\int_a^x K(x,t)y^{\lambda}(t)\,dt = f(x).}$

Замена $w(x) = y^{\lambda}(x)$ приводит к линейному уравнению

$$\int_a^x K(x,t)w(t)\,dt = f(x).$$

13. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x f(t)y^k(t)\,dt = A.}$

Решение:

$$y(x) = \left[A^{1-k} + (k-1)\int_a^x f(t)\,dt\right]^{\frac{1}{1-k}}.$$

14. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^x f(x)g(t)y^k(t)\,dt = 0.}$

1°. Это уравнение путем дифференцирования с последующим исключением интегрального слагаемого (с помощью исходного уравнения) можно свести к дифференциальному уравнению Бернулли

$$y'_x - f(x)g(x)y^k - \frac{f'_x(x)}{f(x)}y = 0, \qquad y(a) = 0.$$

2°. Решение при $k<1$:

$$y(x)=f(x)\left[(1-k)\int_a^x f^k(t)g(t)\,dt\right]^{\frac{1}{1-k}}.$$

При $k>0$ существует также тривиальное решение $y(x)\equiv 0$.

15. $\displaystyle \boldsymbol{y(x)+\int_0^x x^{\lambda-k\lambda-1}f\Big(\frac{t}{x}\Big)y^k(t)\,dt=Ax^\lambda.}$

Решение: $y(x)=\beta x^\lambda$, где β — корень алгебраического уравнения

$$I\beta^k+\beta-A=0,\qquad I=\int_0^1 f(z)z^{k\lambda}\,dz.$$

16. $\displaystyle \boldsymbol{y(x)+\int_0^x f\Big(\frac{t}{x}\Big)\sqrt{y(t)}\,dt=Ax^2.}$

Решения: $y_k(x)=B_k^2x^2$, где B_k — корни квадратных уравнений

$$B^2\pm IB-A=0,\qquad I=\int_0^1 zf(z)\,dz.$$

17. $\displaystyle \boldsymbol{y(x)-\int_0^x t^a f\Big(\frac{t}{x}\Big)y^k(t)\,dt=0,\qquad k\neq 1.}$

Решение:

$$y(x)=Ax^{\frac{1+a}{1-k}},\qquad A^{1-k}=\int_0^1 z^{\frac{a+k}{1-k}}f(z)\,dz.$$

18. $\displaystyle \boldsymbol{y(x)-\int_x^\infty e^{\lambda t+\beta x}f(x-t)y^k(t)\,dt=0,\qquad k\neq 1.}$

Решение:

$$y(x)=A\exp\Big(\frac{\lambda+\beta}{1-k}\,x\Big),\qquad A^{1-k}=\int_0^\infty \exp\Big(\frac{\lambda+\beta k}{1-k}\,z\Big)f(-z)\,dz.$$

19. $\displaystyle \boldsymbol{y(x)-\int_{-\infty}^x e^{\lambda t+\beta x}f(x-t)y^k(t)\,dt=0,\qquad k\neq 1.}$

Решение:

$$y(x)=A\exp\Big(\frac{\lambda+\beta}{1-k}\,x\Big),\qquad A^{1-k}=\int_0^\infty \exp\Big(-\frac{\lambda+\beta k}{1-k}\,z\Big)f(z)\,dz.$$

5.4. Уравнения с экспоненциальной нелинейностью

5.4-1. Уравнения содержат произвольные параметры

1. $\displaystyle \boldsymbol{y(x)+A\int_a^x \exp[\lambda y(t)]\,dt=B.}$

Решение:

$$y(x)=-\frac{1}{\lambda}\ln\big[A\lambda(x-a)+e^{-B\lambda}\big].$$

2. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \exp[\lambda y(t)]\,dt = Bx + C.}$

При $B = 0$ см. уравнение 5.4.1.

Решение при $B \neq 0$:

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{A}{B} + \left(e^{-\lambda y_0} - \frac{A}{B}\right)e^{\lambda B(a-x)}\right], \qquad y_0 = aB + C.$$

3. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x (x-t)\exp[\lambda y(t)]\,dt = Ax^2 + Bx + C.}$

1°. Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = ke^{\lambda y}$. Решение этого интегрального уравнения определяется путем решения автономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''_{xx} + ke^{\lambda y} - 2A = 0$$

с начальными условиями

$$y(a) = Aa^2 + Ba + C, \qquad y'_x(a) = 2Aa + B.$$

2°. Решения в неявном виде:

$$\int_{y_0}^{y}\bigl[4Au - 2F(u) + B^2 - 4AC\bigr]^{-1/2}\,du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \frac{k}{\lambda}\bigl(e^{\lambda u} - e^{\lambda y_0}\bigr), \quad y_0 = Aa^2 + Ba + C.$$

4. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x t^\lambda \exp[\beta y(t)]\,dt = Bx^{\lambda+1} + C.}$

Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$(\lambda+1)\int_{y_0}^{y}\frac{du}{Ae^{\beta u} - B(\lambda+1)} + x^{\lambda+1} - a^{\lambda+1} = 0, \qquad y_0 = Ba^{\lambda+1} + C.$$

5. $\boldsymbol{y(x) + \int_0^x \frac{\exp[\lambda y(t)]}{ax + bt}\,dt = A.}$

Решение: $y(x) = \beta$, где β — корень трансцендентного уравнения

$$\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)e^{\lambda\beta} + b\beta - Ab = 0.$$

6. $\boldsymbol{y(x) + \int_0^x \frac{\exp[\lambda y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}}\,dt = A.}$

Решение: $y(x) = \beta$, где β — корень трансцендентного уравнения

$$ke^{\lambda\beta} + \beta - A = 0, \qquad k = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{a + bz^2}}.$$

7. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^x \exp\bigl[\lambda t + \beta y(t)\bigr]\,dt = Be^{\lambda x} + C.}$

Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$\lambda\int_{y_0}^{y}\frac{du}{Ae^{\beta u} - B\lambda} + e^{\lambda x} - e^{\lambda a} = 0, \qquad y_0 = Be^{\lambda a} + C.$$

8. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \exp\bigl[\lambda(x-t) + \beta y(t)\bigr]\,dt = A.}$

Решение в неявном виде:

$$\int_A^y \frac{dt}{\lambda t - ke^{\beta t} - \lambda A} = x - a.$$

9. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \exp\bigl[\lambda(x-t) + \beta y(t)\bigr]\,dt = Ae^{\lambda x} + B.}$

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{\lambda t - ke^{\beta t} - \lambda B} = x - a, \qquad y_0 = Ae^{\lambda a} + B.$$

10. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\exp[\beta y(t)]\,dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.}$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = ke^{\beta y}$.

11. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\exp[\beta y(t)]\,dt = A\operatorname{ch}(\lambda x) + B.}$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = ke^{\beta y}$.

12. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\exp[\beta y(t)]\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda x) + B.}$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = ke^{\beta y}$.

13. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]\exp[\beta y(t)]\,dt = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C.}$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = ke^{\beta y}$.

5.4-2. Уравнения содержат произвольные функции

14. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x f(t)\exp[\lambda y(t)]\,dt = A.}$

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln\biggl[\lambda\int_a^x f(t)\,dt + e^{-A\lambda}\biggr].$$

15. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x g(t)\exp[\lambda y(t)]\,dt = f(x).}$

1°. Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для функции $y = y(x)$:

$$y'_x + g(x)e^{\lambda y} = f'_x(x) \tag{1}$$

с начальным условием $y(a) = f(a)$. Замена $w = e^{-\lambda y}$ приводит (1) к линейному уравнению

$$w'_x + \lambda f'_x(x)w - \lambda g(x) = 0, \qquad w(a) = \exp\bigl[-\lambda f(a)\bigr].$$

2°. Решение:

$$y(x) = f(x) - \frac{1}{\lambda}\ln\biggl\{1 + \lambda\int_a^x g(t)\exp\bigl[\lambda f(t)\bigr]\,dt\biggr\}.$$

16. $\boldsymbol{y(x) + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f\Big(\frac{t}{x}\Big)\exp[\lambda y(t)]\,dt = A.}$

Решение: $y(x) = \beta$, где β — корень трансцендентного уравнения

$$\beta + Ie^{\lambda\beta} - A = 0, \qquad I = \int_0^1 f(z)\,dz.$$

5.5. Уравнения с гиперболическими нелинейностями

5.5-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\mathrm{ch}[\beta y(t)]$

1. $\boldsymbol{y(x) + k\displaystyle\int_a^x \mathrm{ch}[\beta y(t)]\,dt = A.}$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k\,\mathrm{ch}(\beta y)$.

2. $\boldsymbol{y(x) + k\displaystyle\int_a^x \mathrm{ch}[\beta y(t)]\,dt = Ax + B.}$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k\,\mathrm{ch}(\beta y)$.

3. $\boldsymbol{y(x) + k\displaystyle\int_a^x (x-t)\,\mathrm{ch}[\beta y(t)]\,dt = Ax^2 + Bx + C.}$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k\,\mathrm{ch}(\beta y)$.

4. $\boldsymbol{y(x) + k\displaystyle\int_a^x t^\lambda\,\mathrm{ch}[\beta y(t)]\,dt = Bx^{\lambda+1} + C.}$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k\,\mathrm{ch}(\beta y)$.

5. $\boldsymbol{y(x) + \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{ch}[\beta y(t)]\,dt = A.}$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \mathrm{ch}(\beta y)$.

6. $\boldsymbol{y(x) + \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{ch}[\beta y(t)]}{ax + bt}\,dt = A.}$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \mathrm{ch}(\beta y)$.

7. $\boldsymbol{y(x) + \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{ch}[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}}\,dt = A.}$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \mathrm{ch}(\beta y)$.

8. $\boldsymbol{y(x) + k\displaystyle\int_a^x e^{\lambda t}\,\mathrm{ch}[\beta y(t)]\,dt = Be^{\lambda x} + C.}$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k\,\mathrm{ch}(\beta y)$.

9. $\boldsymbol{y(x) + k\displaystyle\int_a^x e^{\lambda(x-t)}\,\mathrm{ch}[\beta y(t)]\,dt = A.}$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k\,\mathrm{ch}(\beta y)$.

10. $\boldsymbol{y(x) + k\displaystyle\int_a^x e^{\lambda(x-t)}\,\mathrm{ch}[\beta y(t)]\,dt = Ae^{\lambda x} + B.}$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k\,\mathrm{ch}(\beta y)$.

11. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\operatorname{ch}[\beta y(t)]\,dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k\operatorname{ch}(\beta y)$.

12. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\operatorname{ch}[\beta y(t)]\,dt = A\operatorname{ch}(\lambda x) + B.$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k\operatorname{ch}(\beta y)$.

13. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\operatorname{ch}[\beta y(t)]\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda x) + B.$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k\operatorname{ch}(\beta y)$.

14. $y(x) + k\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]\operatorname{ch}[\beta y(t)]\,dt = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C.$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k\operatorname{ch}(\beta y)$.

5.5-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{sh}[\beta y(t)]$

15. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k\operatorname{sh}(\beta y)$.

16. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt = Ax + B.$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k\operatorname{sh}(\beta y)$.

17. $y(x) + k\int_a^x (x-t)\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt = Ax^2 + Bx + C.$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k\operatorname{sh}(\beta y)$.

18. $y(x) + k\int_a^x t^\lambda \operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt = Bx^{\lambda+1} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k\operatorname{sh}(\beta y)$.

19. $y(x) + \int_a^x g(t)\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \operatorname{sh}(\beta y)$.

20. $y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{sh}[\beta y(t)]}{ax+bt}\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \operatorname{sh}(\beta y)$.

21. $y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{sh}[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2+bt^2}}\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \operatorname{sh}(\beta y)$.

22. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda t}\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt = Be^{\lambda x} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k\operatorname{sh}(\beta y)$.

23. $y(x)+k\int_a^x e^{\lambda(x-t)}\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt=A.$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y)=k\operatorname{sh}(\beta y)$.

24. $y(x)+k\int_a^x e^{\lambda(x-t)}\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt=Ae^{\lambda x}+B.$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y)=k\operatorname{sh}(\beta y)$.

25. $y(x)+k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt=Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x}+C.$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y)=k\operatorname{sh}(\beta y)$.

26. $y(x)+k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt=A\operatorname{ch}(\lambda x)+B.$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y)=k\operatorname{sh}(\beta y)$.

27. $y(x)+k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt=A\operatorname{sh}(\lambda x)+B.$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y)=k\operatorname{sh}(\beta y)$.

28. $y(x)+k\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt=A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)+C.$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y)=k\operatorname{sh}(\beta y)$.

5.5-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{th}[\beta y(t)]$

29. $y(x)+k\int_a^x \operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt=A.$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y)=k\operatorname{th}(\beta y)$.

30. $y(x)+k\int_a^x \operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt=Ax+B.$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y)=k\operatorname{th}(\beta y)$.

31. $y(x)+k\int_a^x (x-t)\operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt=Ax^2+Bx+C.$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y)=k\operatorname{th}(\beta y)$.

32. $y(x)+k\int_a^x t^\lambda\operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt=Bx^{\lambda+1}+C.$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y)=k\operatorname{th}(\beta y)$.

33. $y(x)+\int_a^x g(t)\operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt=A.$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y)=\operatorname{th}(\beta y)$.

34. $y(x)+\int_0^x \frac{\operatorname{th}[\beta y(t)]}{ax+bt}\,dt=A.$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y)=\operatorname{th}(\beta y)$.

35. $y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{th}[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}}\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \operatorname{th}(\beta y)$.

36. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda t} \operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt = Be^{\lambda x} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k\operatorname{th}(\beta y)$.

37. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k\operatorname{th}(\beta y)$.

38. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt = Ae^{\lambda x} + B.$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k\operatorname{th}(\beta y)$.

39. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k\operatorname{th}(\beta y)$.

40. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt = A\operatorname{ch}(\lambda x) + B.$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k\operatorname{th}(\beta y)$.

41. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda x) + B.$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k\operatorname{th}(\beta y)$.

42. $y(x) + k\int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C.$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k\operatorname{th}(\beta y)$.

5.5-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{cth}[\beta y(t)]$

43. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{cth}[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k\operatorname{cth}(\beta y)$.

44. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{cth}[\beta y(t)]\,dt = Ax + B.$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k\operatorname{cth}(\beta y)$.

45. $y(x) + k\int_a^x (x-t) \operatorname{cth}[\beta y(t)]\,dt = Ax^2 + Bx + C.$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k\operatorname{cth}(\beta y)$.

46. $y(x) + k\int_a^x t^{\lambda} \operatorname{cth}[\beta y(t)]\,dt = Bx^{\lambda+1} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k\operatorname{cth}(\beta y)$.

47. $\displaystyle y(x) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{cth}[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \mathrm{cth}(\beta y)$.

48. $\displaystyle y(x) + \int_0^x \frac{\mathrm{cth}[\beta y(t)]}{ax + bt}\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \mathrm{cth}(\beta y)$.

49. $\displaystyle y(x) + \int_0^x \frac{\mathrm{cth}[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}}\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \mathrm{cth}(\beta y)$.

50. $\displaystyle y(x) + k\int_a^x e^{\lambda t}\,\mathrm{cth}[\beta y(t)]\,dt = Be^{\lambda x} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k\,\mathrm{cth}(\beta y)$.

51. $\displaystyle y(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)}\,\mathrm{cth}[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k\,\mathrm{cth}(\beta y)$.

52. $\displaystyle y(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)}\,\mathrm{cth}[\beta y(t)]\,dt = Ae^{\lambda x} + B.$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k\,\mathrm{cth}(\beta y)$.

53. $\displaystyle y(x) + k\int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)]\,\mathrm{cth}[\beta y(t)]\,dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k\,\mathrm{cth}(\beta y)$.

54. $\displaystyle y(x) + k\int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)]\,\mathrm{cth}[\beta y(t)]\,dt = A\,\mathrm{ch}(\lambda x) + B.$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k\,\mathrm{cth}(\beta y)$.

55. $\displaystyle y(x) + k\int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)]\,\mathrm{cth}[\beta y(t)]\,dt = A\,\mathrm{sh}(\lambda x) + B.$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k\,\mathrm{cth}(\beta y)$.

56. $\displaystyle y(x) + k\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]\,\mathrm{cth}[\beta y(t)]\,dt = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C.$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k\,\mathrm{cth}(\beta y)$.

5.6. Уравнения с логарифмической нелинейностью

5.6-1. Подынтегральные выражения содержат степенные функции

1. $\displaystyle y(x) + k\int_a^x \ln[\lambda y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k\ln(\lambda y)$.

2. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \ln[\lambda y(t)]\,dt = Ax + B.}$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k\ln(\lambda y)$.

3. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x (x-t)\ln[\lambda y(t)]\,dt = Ax^2 + Bx + C.}$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k\ln(\lambda y)$.

4. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x t^\lambda \ln[\mu y(t)]\,dt = Bx^{\lambda+1} + C.}$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k\ln(\mu y)$.

5. $\boldsymbol{y(x) + \int_0^x \frac{\ln[\lambda y(t)]}{ax+bt}\,dt = A.}$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \ln(\lambda y)$.

6. $\boldsymbol{y(x) + \int_0^x \frac{\ln[\lambda y(t)]}{\sqrt{ax^2+bt^2}}\,dt = A.}$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \ln(\lambda y)$.

5.6-2. Подынтегральные выражения содержат экспоненциальные функции

7. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x e^{\lambda t} \ln[\mu y(t)]\,dt = Be^{\lambda x} + C.}$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k\ln(\mu y)$.

8. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)} \ln[\mu y(t)]\,dt = A.}$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k\ln(\mu y)$.

9. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)} \ln[\mu y(t)]\,dt = Ae^{\lambda x} + B.}$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k\ln(\mu y)$.

5.6-3. Другие подынтегральные выражения

10. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x g(t) \ln[\lambda y(t)]\,dt = A.}$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \ln(\lambda y)$.

11. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \ln[\mu y(t)]\,dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.}$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k\ln(\mu y)$.

12. $\boldsymbol{y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \ln[\mu y(t)]\,dt = A\operatorname{ch}(\lambda x) + B.}$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k\ln(\mu y)$.

13. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \ln[\mu y(t)]\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda x) + B.$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k\ln(\mu y)$.

14. $y(x) + k\int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \ln[\mu y(t)]\,dt = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C.$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k\ln(\mu y)$.

5.7. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями

5.7-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\cos[\beta y(t)]$

1. $y(x) + k\int_a^x \cos[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k\cos(\beta y)$.

2. $y(x) + k\int_a^x \cos[\beta y(t)]\,dt = Ax + B.$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k\cos(\beta y)$.

3. $y(x) + k\int_a^x (x-t)\cos[\beta y(t)]\,dt = Ax^2 + Bx + C.$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k\cos(\beta y)$.

4. $y(x) + k\int_a^x t^\lambda \cos[\beta y(t)]\,dt = Bx^{\lambda+1} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k\cos(\beta y)$.

5. $y(x) + \int_a^x g(t)\cos[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \cos(\beta y)$.

6. $y(x) + \int_0^x \frac{\cos[\beta y(t)]}{ax+bt}\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \cos(\beta y)$.

7. $y(x) + \int_0^x \frac{\cos[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2+bt^2}}\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \cos(\beta y)$.

8. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda t}\cos[\beta y(t)]\,dt = Be^{\lambda x} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k\cos(\beta y)$.

9. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)}\cos[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k\cos(\beta y)$.

10. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)} \cos[\beta y(t)]\, dt = Ae^{\lambda x} + B.$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k\cos(\beta y)$.

11. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \cos[\beta y(t)]\, dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k\cos(\beta y)$.

12. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \cos[\beta y(t)]\, dt = A\operatorname{ch}(\lambda x) + B.$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k\cos(\beta y)$.

13. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \cos[\beta y(t)]\, dt = A\operatorname{sh}(\lambda x) + B.$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k\cos(\beta y)$.

14. $y(x) + k\int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \cos[\beta y(t)]\, dt = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C.$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k\cos(\beta y)$.

5.7-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\sin[\beta y(t)]$

15. $y(x) + k\int_a^x \sin[\beta y(t)]\, dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k\sin(\beta y)$.

16. $y(x) + k\int_a^x \sin[\beta y(t)]\, dt = Ax + B.$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k\sin(\beta y)$.

17. $y(x) + k\int_a^x (x-t)\sin[\beta y(t)]\, dt = Ax^2 + Bx + C.$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k\sin(\beta y)$.

18. $y(x) + k\int_a^x t^\lambda \sin[\beta y(t)]\, dt = Bx^{\lambda+1} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k\sin(\beta y)$.

19. $y(x) + \int_a^x g(t)\sin[\beta y(t)]\, dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \sin(\beta y)$.

20. $y(x) + \int_0^x \dfrac{\sin[\beta y(t)]}{ax + bt}\, dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \sin(\beta y)$.

21. $y(x) + \int_0^x \dfrac{\sin[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}}\, dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \sin(\beta y)$.

22. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda t} \sin[\beta y(t)]\,dt = Be^{\lambda x} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k\sin(\beta y)$.

23. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)} \sin[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k\sin(\beta y)$.

24. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)} \sin[\beta y(t)]\,dt = Ae^{\lambda x} + B.$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k\sin(\beta y)$.

25. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \sin[\beta y(t)]\,dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k\sin(\beta y)$.

26. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \sin[\beta y(t)]\,dt = A\operatorname{ch}(\lambda x) + B.$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k\sin(\beta y)$.

27. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \sin[\beta y(t)]\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda x) + B.$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k\sin(\beta y)$.

28. $y(x) + k\int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \sin[\beta y(t)]\,dt = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C.$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k\sin(\beta y)$.

5.7-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{tg}[\beta y(t)]$

29. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{tg}[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k\operatorname{tg}(\beta y)$.

30. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{tg}[\beta y(t)]\,dt = Ax + B.$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k\operatorname{tg}(\beta y)$.

31. $y(x) + k\int_a^x (x-t)\operatorname{tg}[\beta y(t)]\,dt = Ax^2 + Bx + C.$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k\operatorname{tg}(\beta y)$.

32. $y(x) + k\int_a^x t^{\lambda}\operatorname{tg}[\beta y(t)]\,dt = Bx^{\lambda+1} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k\operatorname{tg}(\beta y)$.

33. $y(x) + \int_a^x g(t)\operatorname{tg}[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \operatorname{tg}(\beta y)$.

34. $y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{tg}[\beta y(t)]}{ax+bt}\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \operatorname{tg}(\beta y)$.

35. $y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{tg}[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2+bt^2}}\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \operatorname{tg}(\beta y)$.

36. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda t}\operatorname{tg}[\beta y(t)]\,dt = Be^{\lambda x} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k\operatorname{tg}(\beta y)$.

37. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)}\operatorname{tg}[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k\operatorname{tg}(\beta y)$.

38. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)}\operatorname{tg}[\beta y(t)]\,dt = Ae^{\lambda x} + B.$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k\operatorname{tg}(\beta y)$.

39. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\operatorname{tg}[\beta y(t)]\,dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k\operatorname{tg}(\beta y)$.

40. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\operatorname{tg}[\beta y(t)]\,dt = A\operatorname{ch}(\lambda x) + B.$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k\operatorname{tg}(\beta y)$.

41. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\operatorname{tg}[\beta y(t)]\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda x) + B.$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k\operatorname{tg}(\beta y)$.

42. $y(x) + k\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]\operatorname{tg}[\beta y(t)]\,dt = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C.$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k\operatorname{tg}(\beta y)$.

5.7-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{ctg}[\beta y(t)]$

43. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{ctg}[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k\operatorname{ctg}(\beta y)$.

44. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{ctg}[\beta y(t)]\,dt = Ax + B.$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k\operatorname{ctg}(\beta y)$.

45. $y(x) + k\int_a^x (x-t)\operatorname{ctg}[\beta y(t)]\,dt = Ax^2 + Bx + C.$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k\operatorname{ctg}(\beta y)$.

46. $y(x) + k\int_a^x t^\lambda \operatorname{ctg}[\beta y(t)]\,dt = Bx^{\lambda+1} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k\operatorname{ctg}(\beta y)$.

47. $y(x) + \int_a^x g(t)\operatorname{ctg}[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \operatorname{ctg}(\beta y)$.

48. $y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{ctg}[\beta y(t)]}{ax + bt}\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \operatorname{ctg}(\beta y)$.

49. $y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{ctg}[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}}\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \operatorname{ctg}(\beta y)$.

50. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda t}\operatorname{ctg}[\beta y(t)]\,dt = Be^{\lambda x} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k\operatorname{ctg}(\beta y)$.

51. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)}\operatorname{ctg}[\beta y(t)]\,dt = A.$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k\operatorname{ctg}(\beta y)$.

52. $y(x) + k\int_a^x e^{\lambda(x-t)}\operatorname{ctg}[\beta y(t)]\,dt = Ae^{\lambda x} + B.$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k\operatorname{ctg}(\beta y)$.

53. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\operatorname{ctg}[\beta y(t)]\,dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k\operatorname{ctg}(\beta y)$.

54. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\operatorname{ctg}[\beta y(t)]\,dt = A\operatorname{ch}(\lambda x) + B.$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k\operatorname{ctg}(\beta y)$.

55. $y(x) + k\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]\operatorname{ctg}[\beta y(t)]\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda x) + B.$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k\operatorname{ctg}(\beta y)$.

56. $y(x) + k\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]\operatorname{ctg}[\beta y(t)]\,dt = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C.$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k\operatorname{ctg}(\beta y)$.

5.8. Уравнения с нелинейностями общего вида

5.8-1. Уравнения вида $\int_a^x G(\cdots)\,dt = F(x)$

1. $\int_a^x K(x,t)\varphi\bigl(y(t)\bigr)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = \varphi\bigl(y(x)\bigr)$ приводит к линейному уравнению

$$\int_a^x K(x,t)w(t)\,dt = f(x).$$

2. $\displaystyle\int_a^x K(x,t)\varphi\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = f(x).$

Замена $w(x) = \varphi\bigl(x, y(x)\bigr)$ приводит к линейному уравнению

$$\int_a^x K(x,t)w(t)\,dt = f(x).$$

5.8-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x,t)G\bigl(y(t)\bigr)\,dt = F(x)$

3. $\displaystyle y(x) + \int_a^x f\bigl(y(t)\bigr)\,dt = A.$

Решение в неявном виде:

$$\int_A^y \frac{du}{f(u)} + x - a = 0.$$

4. $\displaystyle y(x) + \int_a^x f\bigl(y(t)\bigr)\,dt = Ax + B.$

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y \frac{du}{A - f(u)} = x - a, \qquad y_0 = Aa + B.$$

5. $\displaystyle y(x) + \int_a^x (x-t) f\bigl(y(t)\bigr)\,dt = Ax^2 + Bx + C.$

1°. Частный случай уравнения 5.8.19. Решение этого интегрального уравнения определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''_{xx} + f(y) - 2A = 0$$

с начальными условиями

$$y(a) = Aa^2 + Ba + C, \qquad y'_x(a) = 2Aa + B.$$

2°. Решения в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y \bigl[4Au - 2F(u) + B^2 - 4AC\bigr]^{-1/2}\,du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \int_{y_0}^u f(t)\,dt, \quad y_0 = Aa^2 + Ba + C.$$

6. $\displaystyle y(x) + \int_a^x t^\lambda f\bigl(y(t)\bigr)\,dt = Bx^{\lambda+1} + C.$

Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$(\lambda+1)\int_{y_a}^y \frac{du}{f(u) - B(\lambda+1)} + x^{\lambda+1} - a^{\lambda+1} = 0, \qquad y_a = Ba^{\lambda+1} + C.$$

7. $\displaystyle y(x) + \int_a^x g(t) f\bigl(y(t)\bigr)\,dt = A.$

Решение в неявном виде:

$$\int_A^y \frac{du}{f(u)} + \int_a^x g(t)\,dt = 0.$$

8. $\boldsymbol{y(x)+\int_0^x \frac{f\bigl(y(t)\bigr)}{ax+bt}\,dt=A.}$

Решение: $y(x)=\lambda$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\ln\Bigl(1+\frac{b}{a}\Bigr)f(\lambda)+b\lambda-Ab=0.$$

9. $\boldsymbol{y(x)+\int_0^x \frac{f\bigl(y(t)\bigr)}{\sqrt{ax^2+bt^2}}\,dt=A.}$

Решение: $y(x)=\lambda$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$kf(\lambda)+\lambda-A=0,\qquad k=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{a+bz^2}}.$$

10. $\boldsymbol{y(x)+x\int_0^x f\bigl(y(t)\bigr)\frac{dt}{x^2+t^2}=A.}$

Решение: $y(x)=\lambda$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda+\tfrac{1}{4}\pi f(\lambda)=A.$$

11. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^x e^{\lambda t}f\bigl(y(t)\bigr)\,dt=Be^{\lambda x}+C.}$

Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$\lambda\int_{y_0}^y\frac{du}{f(u)-B\lambda}+e^{\lambda x}-e^{\lambda a}=0,\qquad y_0=Be^{\lambda a}+C.$$

12. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^x e^{\lambda(x-t)}f\bigl(y(t)\bigr)\,dt=A.}$

Решение в неявном виде:

$$\int_A^y\frac{du}{\lambda u-f(u)-\lambda A}=x-a.$$

13. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^x e^{\lambda(x-t)}f\bigl(y(t)\bigr)\,dt=Ae^{\lambda x}+B.}$

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y\frac{du}{\lambda u-f(u)-\lambda B}=x-a,\qquad y_0=Ae^{\lambda a}+B.$$

14. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)]f\bigl(y(t)\bigr)\,dt=Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x}+C.}$

1°. Частный случай уравнения 5.8.23. Решение этого интегрального уравнения определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''_{xx}+\lambda f(y)-\lambda^2y+\lambda^2C=0$$

с начальными условиями

$$y(a)=Ae^{\lambda a}+Be^{-\lambda a}+C,\qquad y'_x(a)=A\lambda e^{\lambda a}-B\lambda e^{-\lambda a}.$$

2°. Решения в неявном виде:

$$\int_{y_0}^{y} \bigl[\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 Cu - 2\lambda F(u) + \lambda^2 (C^2 - 4AB)\bigr]^{-1/2}\,du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \int_{y_0}^{u} f(t)\,dt, \quad y_0 = Ae^{\lambda a} + Be^{-\lambda a} + C.$$

15. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] f\bigl(y(t)\bigr)\,dt = A\operatorname{ch}(\lambda x) + B.}$

Частный случай уравнения 5.8.14.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^{y} \bigl[\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 Bu - 2\lambda F(u) + \lambda^2 (B^2 - A^2)\bigr]^{-1/2}\,du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \int_{y_0}^{u} f(t)\,dt, \quad y_0 = A\operatorname{ch}(\lambda a) + B.$$

16. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] f\bigl(y(t)\bigr)\,dt = A\operatorname{sh}(\lambda x) + B.}$

Частный случай уравнения 5.8.23.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^{y} \bigl[\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 Bu - 2\lambda F(u) + \lambda^2 (A^2 + B^2)\bigr]^{-1/2}\,du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \int_{y_0}^{u} f(t)\,dt, \quad y_0 = A\operatorname{sh}(\lambda a) + B.$$

17. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f\bigl(y(t)\bigr)\,dt = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C.}$

1°. Частный случай уравнения 5.8.25. Решение этого интегрального уравнения определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda f(y) + \lambda^2 y - \lambda^2 C = 0$$

с начальными условиями

$$y(a) = A\sin(\lambda a) + B\cos(\lambda a) + C, \qquad y'_x(a) = A\lambda\cos(\lambda a) - B\lambda\sin(\lambda a).$$

2°. Решения в неявном виде:

$$\int_{y_0}^{y} \bigl[\lambda^2 D - \lambda^2 u^2 + 2\lambda^2 Cu - 2\lambda F(u)\bigr]^{-1/2}\,du = \pm(x-a),$$

$$y_0 = A\sin(\lambda a) + B\cos(\lambda a) + C, \quad D = A^2 + B^2 - C^2, \quad F(u) = \int_{y_0}^{u} f(t)\,dt.$$

5.8-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x,t)G\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = F(x)$

18. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(x).}$

Решение этого интегрального уравнения определяется из обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$y'_x + f(x,y) - g'_x(x) = 0$$

с начальным условием $y(a) = g(a)$. Точные решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для различных функций $f(x,y)$ и $g(x)$ см. в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

19. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x (x-t) f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(x).}$

Дифференцируя уравнение по x, имеем

$$y'_x + \int_a^x f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g'_x(x). \qquad (1)$$

Дифференцируя это равенство по x, получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''_{xx} + f(x, y) - g''_{xx}(x) = 0. \qquad (2)$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = g(a), \qquad y'_x(a) = g'_x(a). \qquad (3)$$

Уравнение (2) с условиями (3) определяет решение исходного интегрального уравнения. Точные решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (2) для различных функций $f(x, y)$ и $g(x)$ см. в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

20. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x (x-t)^n f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(x), \qquad n = 1, 2, \ldots}$

Дифференцируя уравнение $n+1$ раз по x, для функции $y = y(x)$ получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение $(n+1)$-го порядка

$$y_x^{(n+1)} + n!\, f(x, y) - g_x^{(n+1)}(x) = 0.$$

Это уравнение с начальными условиями

$$y(a) = g(a), \quad y'_x(a) = g'_x(a), \quad \ldots, \quad y_x^{(n)}(a) = g_x^{(n)}(a)$$

определяет решение исходного интегрального уравнения.

21. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(x).}$

Дифференцируя уравнение по x, имеем

$$y'_x + f\bigl(x, y(x)\bigr) + \lambda \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g'_x(x).$$

Исключая отсюда слагаемое с интегралом с помощью исходного уравнения, получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'_x + f(x, y) - \lambda y + \lambda g(x) - g'_x(x) = 0.$$

Искомая функция $y = y(x)$ должна удовлетворять начальному условию $y(a) = g(a)$. Точные решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для различных функций $f(x, y)$ и $g(x)$ см. в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

22. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(x).}$

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y'_x(x) + f\bigl(x, y(x)\bigr) + \lambda \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g'_x(x), \qquad (1)$$

$$y''_{xx}(x) + \bigl[f\bigl(x, y(x)\bigr)\bigr]'_x + \lambda^2 \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g''_{xx}(x). \qquad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + \bigl[f(x,y)\bigr]'_x - \lambda^2 y + \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0. \tag{3}$$

Полагая $x=a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y=y(x)$:

$$y(a) = g(a), \qquad y'_x(a) = g'_x(a) - f\bigl(a, g(a)\bigr). \tag{4}$$

Уравнение (3) с условиями (4) определяет решение исходного интегрального уравнения.

23. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)]f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = g(x).}$

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y'_x(x) + \lambda\int_a^x \mathrm{ch}[\lambda(x-t)]f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = g'_x(x), \tag{1}$$

$$y''_{xx}(x) + \lambda f\bigl(x,y(x)\bigr) + \lambda^2\int_a^x \mathrm{sh}[\lambda(x-t)]f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = g''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda f(x,y) - \lambda^2 y + \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0. \tag{3}$$

Полагая $x=a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y=y(x)$:

$$y(a) = g(a), \qquad y'_x(a) = g'_x(a). \tag{4}$$

Уравнение (3) с условиями (4) определяет решение исходного интегрального уравнения. Точные решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (3) для различных функций $f(x,y)$ и $g(x)$ см. в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

24. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \cos[\lambda(x-t)]f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = g(x).}$

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y'_x(x) + f\bigl(x,y(x)\bigr) - \lambda\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = g'_x(x), \tag{1}$$

$$y''_{xx}(x) + \bigl[f\bigl(x,y(x)\bigr)\bigr]'_x - \lambda^2\int_a^x \cos[\lambda(x-t)]f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = g''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + \bigl[f(x,y)\bigr]'_x + \lambda^2 y - \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0. \tag{3}$$

Полагая $x=a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y=y(x)$:

$$y(a) = g(a), \qquad y'_x(a) = g'_x(a) - f\bigl(a, g(a)\bigr). \tag{4}$$

Уравнение (3) с условиями (4) определяет решение исходного интегрального уравнения.

25. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]f\big(t, y(t)\big)\,dt = g(x).}$

Дифференцируя уравнение два раза по x, получим

$$y'_x(x) + \lambda \int_a^x \cos[\lambda(x-t)]f\big(t, y(t)\big)\,dt = g'_x(x), \tag{1}$$

$$y''_{xx}(x) + \lambda f\big(x, y(x)\big) - \lambda^2 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]f\big(t, y(t)\big)\,dt = g''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda f(x, y) + \lambda^2 y - \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0. \tag{3}$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = g(a), \qquad y'_x(a) = g'_x(a). \tag{4}$$

Уравнение (3) с условиями (4) определяет решение исходного интегрального уравнения. Точные решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (3) для различных функций $f(x, y)$ и $g(x)$ см. в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

5.8-4. Другие уравнения

26. $\boldsymbol{y(x) + \frac{1}{x}\int_0^x f\Big(\frac{t}{x},\, y(t)\Big)\,dt = A.}$

Решение: $y(x) = \lambda$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda + F(\lambda) - A = 0, \qquad F(\lambda) = \int_0^1 f(z, \lambda)\,dz.$$

Разным корням отвечают разные решения.

27. $\boldsymbol{y(x) + \int_0^x f\Big(\frac{t}{x},\, \frac{y(t)}{t}\Big)\,dt = Ax.}$

Решение: $y(x) = \lambda x$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda + F(\lambda) - A = 0, \qquad F(\lambda) = \int_0^1 f(z, \lambda)\,dz.$$

Разным корням отвечают разные решения.

28. $\boldsymbol{y(x) + \int_x^\infty f\big(t - x,\, y(t - x)\big)y(t)\,dt = ae^{-\lambda x}.}$

Решение: $y(x) = \beta e^{-\lambda x}$, где β — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\beta + \beta I(\beta) = a, \qquad I(\beta) = \int_0^\infty f(z, \beta e^{-\lambda z})e^{-\lambda z}\,dz.$$

Разным корням отвечают разные решения.

6. Нелинейные уравнения с постоянными пределами интегрирования

▶ ***Обозначения:*** *f, g, h, φ — произвольные функции сложных аргументов, указанных в круглых скобках после знака функции (аргумент может зависеть от t, x, y); A, B, C, a, b, c, s, β, γ, λ, μ — произвольные параметры; k, m, n — целые неотрицательные числа.*

6.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные параметры

6.1-1. Уравнения вида $\int_a^b K(t)y(x)y(t)\,dt = F(x)$

1. $\displaystyle\int_0^1 y(x)y(t)\,dt = Ax^\lambda, \qquad A>0, \quad \lambda>-1.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x)=Ax^\lambda$, $g(t)=1$, $a=0$, $b=1$.

Решения: $y(x)=\pm\sqrt{A(\lambda+1)}\,x^\lambda$.

2. $\displaystyle\int_0^1 y(x)y(t)\,dt = Ae^{\beta x}, \qquad A>0.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x)=Ae^{\beta x}$, $g(t)=1$, $a=0$, $b=1$.

Решения: $y(x)=\pm\sqrt{\dfrac{A\beta}{e^\beta-1}}\,e^{\beta x}$.

3. $\displaystyle\int_0^1 y(x)y(t)\,dt = A\operatorname{ch}(\beta x), \qquad A>0.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x)=A\operatorname{ch}(\beta x)$, $g(t)=1$, $a=0$, $b=1$.

Решения: $y(x)=\pm\sqrt{\dfrac{A\beta}{\operatorname{sh}\beta}}\operatorname{ch}(\beta x)$.

4. $\displaystyle\int_0^1 y(x)y(t)\,dt = A\operatorname{sh}(\beta x), \qquad A\beta>0.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x)=A\operatorname{sh}(\beta x)$, $g(t)=1$, $a=0$, $b=1$.

Решения: $y(x)=\pm\sqrt{\dfrac{A\beta}{\operatorname{ch}\beta-1}}\operatorname{sh}(\beta x)$.

5. $\displaystyle\int_0^1 y(x)y(t)\,dt = A\operatorname{th}(\beta x), \qquad A\beta>0.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x)=A\operatorname{th}(\beta x)$, $g(t)=1$, $a=0$, $b=1$.

Решения: $y(x)=\pm\sqrt{\dfrac{A\beta}{\ln\operatorname{ch}\beta}}\operatorname{th}(\beta x)$.

6. $\displaystyle\int_0^1 y(x)y(t)\,dt = A\ln(\beta x), \qquad A(\ln\beta - 1) > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = A\ln(\beta x)$, $g(t) = 1$, $a = 0$, $b = 1$.

Решения: $y(x) = \pm\sqrt{\dfrac{A}{\ln\beta - 1}}\,\ln(\beta x).$

7. $\displaystyle\int_0^1 y(x)y(t)\,dt = A\cos(\beta x), \qquad A > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = A\cos(\beta x)$, $g(t) = 1$, $a = 0$, $b = 1$.

Решения: $y(x) = \pm\sqrt{\dfrac{A\beta}{\sin\beta}}\,\cos(\beta x).$

8. $\displaystyle\int_0^1 y(x)y(t)\,dt = A\sin(\beta x), \qquad A\beta > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = A\sin(\beta x)$, $g(t) = 1$, $a = 0$, $b = 1$.

Решения: $y(x) = \pm\sqrt{\dfrac{A\beta}{1 - \cos\beta}}\,\sin(\beta x).$

9. $\displaystyle\int_0^1 y(x)y(t)\,dt = A\operatorname{tg}(\beta x), \qquad A\beta > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = A\operatorname{tg}(\beta x)$, $g(t) = 1$, $a = 0$, $b = 1$.

Решения: $y(x) = \pm\sqrt{\dfrac{-A\beta}{\ln|\cos\beta|}}\,\operatorname{tg}(\beta x).$

10. $\displaystyle\int_0^1 t^\mu y(x)y(t)\,dt = Ax^\lambda, \qquad A > 0, \quad \mu + \lambda > -1.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = Ax^\lambda$, $g(t) = t^\mu$, $a = 0$, $b = 1$.
Решения: $y(x) = \pm\sqrt{A(\mu + \lambda + 1)}\,x^\lambda.$

11. $\displaystyle\int_0^1 e^{\mu t} y(x)y(t)\,dt = Ae^{\beta x}, \qquad A > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = Ae^{\beta x}$, $g(t) = e^{\mu t}$, $a = 0$, $b = 1$.

Решения: $y(x) = \pm\sqrt{\dfrac{A(\mu + \beta)}{e^{\mu+\beta} - 1}}\,e^{\beta x}.$

6.1-2. Уравнения вида $\int_a^b G(\cdots)\,dt = F(x)$

12. $\displaystyle\int_0^1 y(t)y(xt)\,dt = A, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

Частный случай уравнения 6.2.2 при $f(t) = 1$, $a = 0$, $b = 1$.

1°. Решения:

$$
\begin{aligned}
&y_1(x) = \sqrt{A}, && y_2(x) = -\sqrt{A},\\
&y_3(x) = \sqrt{A}\,(3x - 2), && y_4(x) = -\sqrt{A}\,(3x - 2),\\
&y_5(x) = \sqrt{A}\,(10x^2 - 12x + 3), && y_6(x) = -\sqrt{A}\,(10x^2 - 12x + 3).
\end{aligned}
$$

2°. Интегральное уравнение имеет также и другие решения, например:

$$y_7(x) = \frac{\sqrt{A}}{C}\left[(2C+1)x^C - C - 1\right], \qquad y_8(x) = -\frac{\sqrt{A}}{C}\left[(2C+1)x^C - C - 1\right],$$
$$y_9(x) = \sqrt{A}\,(\ln x + 1), \qquad y_{10}(x) = -\sqrt{A}\,(\ln x + 1),$$

где C — произвольная постоянная.

3°. О других решениях см. в 6.2.2.

13. $\displaystyle\int_0^1 y(t)y(xt^\beta)\,dt = A, \qquad \beta > 0.$

1°. Решения:

$$y_1(x) = \sqrt{A}, \qquad y_2(x) = -\sqrt{A},$$
$$y_3(x) = \sqrt{B}\left[(\beta+2)x - \beta - 1\right], \qquad y_4(x) = -\sqrt{B}\left[(\beta+2)x - \beta - 1\right],$$

где $B = \sqrt{\dfrac{2A}{\beta(\beta+1)}}$.

2°. Интегральное уравнение имеет также и другие более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k x^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

14. $\displaystyle\int_1^\infty y(t)y(xt)\,dt = Ax^{-\lambda}, \qquad \lambda > 0, \quad 1 \leqslant x < \infty.$

Частный случай уравнения 6.2.3 при $f(t) = 1$, $a = 1$, $b = \infty$.

1°. Решения:

$$y_1(x) = Bx^{-\lambda}, \qquad y_2(x) = -Bx^{-\lambda}, \qquad \lambda > \tfrac{1}{2};$$
$$y_3(x) = B\left[(2\lambda-3)x - 2\lambda + 2\right]x^{-\lambda}, \qquad y_4(x) = -B\left[(2\lambda-3)x - 2\lambda + 2\right]x^{-\lambda}, \qquad \lambda > \tfrac{3}{2};$$

где $B = \sqrt{A(2\lambda - 1)}$.

2°. При достаточно больших λ интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k x^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений. О других решениях см. в 6.2.2.

15. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} y(t)y(xt)\,dt = A, \qquad \lambda > 0, \quad 0 \leqslant x < \infty.$

Частный случай уравнения 6.2.2 при $f(t) = e^{-\lambda t}$, $a = 0$, $b = \infty$.

1°. Решения:

$$y_1(x) = \sqrt{A\lambda}, \qquad y_2(x) = -\sqrt{A\lambda},$$
$$y_3(x) = \sqrt{\tfrac{1}{2}A\lambda}\,(\lambda x - 2), \qquad y_4(x) = -\sqrt{\tfrac{1}{2}A\lambda}\,(\lambda x - 2).$$

2°. Интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k x^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений. О других решениях см. в 6.2.2.

16. $\displaystyle\int_0^1 y(t)y(x+\lambda t)\,dt = A, \qquad 0 \leqslant x < \infty.$

Частный случай уравнения 6.2.7 при $f(t) \equiv 1$, $a = 0$, $b = 1$.

Решения:

$$y_1(x) = \sqrt{A}, \qquad y_2(x) = -\sqrt{A},$$
$$y_3(x) = \sqrt{3A/\lambda}\,(1-2x), \quad y_4(x) = -\sqrt{3A/\lambda}\,(1-2x).$$

17. $\displaystyle\int_0^\infty y(t)y(x+\lambda t)\,dt = Ae^{-\beta x}, \qquad A, \lambda, \beta > 0, \quad 0 \leqslant x < \infty.$

Частный случай уравнения 6.2.9 при $f(t) \equiv 1$, $a = 0$, $b = \infty$.

Решения:

$$y_1(x) = \sqrt{A\beta(\lambda+1)}\,e^{-\beta x}, \qquad y_2(x) = -\sqrt{A\beta(\lambda+1)}\,e^{-\beta x},$$
$$y_3(x) = B\bigl[\beta(\lambda+1)x - 1\bigr]e^{-\beta x}, \quad y_4(x) = -B\bigl[\beta(\lambda+1)x - 1\bigr]e^{-\beta x},$$

где $B = \sqrt{A\beta(\lambda+1)/\lambda}$.

18. $\displaystyle\int_0^1 y(t)y(x-t)\,dt = A, \qquad -\infty < x < \infty.$

Частный случай уравнения 6.2.10 при $f(t) \equiv 1$, $a = 0$, $b = 1$.

1°. Решения при $A > 0$:

$$y_1(x) = \sqrt{A}, \qquad y_2(x) = -\sqrt{A},$$
$$y_3(x) = \sqrt{5A}(6x^2 - 6x + 1), \quad y_4(x) = -\sqrt{5A}(6x^2 - 6x + 1).$$

2°. Решения при $A < 0$:

$$y_1(x) = \sqrt{-3A}\,(1-2x), \quad y_2(x) = -\sqrt{-3A}\,(1-2x).$$

Интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиаль ного вида $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k x^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующеі системы алгебраических уравнений.

19. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} y\Bigl(\frac{x}{t}\Bigr) y(t)\,dt = Ax^b, \qquad \lambda > 0.$

Решения: $y(x) = \pm\sqrt{A\lambda}\,x^b$.

6.1-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x,t)y^2(t)\,dt = F(x)$

20. $\displaystyle y(x) + A\int_a^b x^\lambda y^2(t)\,dt = 0.$

Решения:

$$y_1(x) = 0, \qquad y_2(x) = -\frac{2\lambda+1}{A(b^{2\lambda+1} - a^{2\lambda+1})}x^\lambda.$$

21. $\displaystyle y(x) + A\int_a^b x^\lambda t^\mu y^2(t)\,dt = 0.$

Решения:

$$y_1(x) = 0, \qquad y_2(x) = -\frac{2\lambda+\mu+1}{A(b^{2\lambda+\mu+1} - a^{2\lambda+\mu+1})}x^\lambda.$$

22. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b e^{-\lambda x} y^2(t)\,dt = 0.}$

Решения:

$$y_1(x) = 0, \qquad y_2(x) = \frac{2\lambda}{A(e^{-2\lambda b} - e^{-2\lambda a})} e^{-\lambda x}.$$

23. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b e^{-\lambda x - \mu t} y^2(t)\,dt = 0.}$

Решения:

$$y_1(x) = 0, \qquad y_2(x) = \frac{2\lambda + \mu}{A[e^{-(2\lambda+\mu)b} - e^{-(2\lambda+\mu)a}]} e^{-\lambda x}.$$

24. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b x^\lambda e^{-\mu t} y^2(t)\,dt = 0.}$

Частный случай уравнения 6.2.20 при $f(x) = Ax^\lambda$, $g(t) = e^{-\mu t}$.

25. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b e^{-\mu x} t^\lambda y^2(t)\,dt = 0.}$

Частный случай уравнения 6.2.20 при $f(x) = Ae^{-\mu x}$, $g(t) = t^\lambda$.

26. $\boldsymbol{y(x) + A\int_0^1 y^2(t)\,dt = Bx^\mu, \qquad \mu > -1.}$

Частный случай уравнения 6.2.22 при $g(t) = A$, $f(x) = Bx^\mu$, $a = 0$, $b = 1$.
Решение: $y(x) = Bx^\mu + \lambda$, где λ определяется из квадратного уравнения

$$\lambda^2 + \frac{1}{A}\left(1 + \frac{2AB}{\mu+1}\right)\lambda + \frac{B^2}{2\mu+1} = 0.$$

Разным корням отвечают разные решения.

27. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b t^\beta y^2(t)\,dt = Bx^\mu.}$

Частный случай уравнения 6.2.22 при $g(t) = At^\beta$, $f(x) = Bx^\mu$.

28. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b e^{\beta t} y^2(t)\,dt = Be^{\mu x}.}$

Частный случай уравнения 6.2.22 при $g(t) = Ae^{\beta t}$, $f(x) = Be^{\mu x}$.

29. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b x^\beta y^2(t)\,dt = Bx^\mu.}$

Частный случай уравнения 6.2.23 при $g(x) = Ax^\beta$, $f(x) = Bx^\mu$.

30. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b e^{\beta x} y^2(t)\,dt = Be^{\mu x}.}$

Частный случай уравнения 6.2.23 при $g(x) = Ae^{\beta x}$, $f(x) = Be^{\mu x}$.

6.1-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x,t)y(x)y(t)\,dt = F(x)$

31. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b t^\beta y(x)y(t)\,dt = Bx^\mu.}$

Частный случай уравнения 6.2.25 при $g(t) = At^\beta$, $f(x) = Bx^\mu$.

32. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b e^{\beta t} y(x)y(t)\,dt = Be^{\mu x}.}$

Частный случай уравнения 6.2.25 при $g(t) = Ae^{\beta t}$, $f(x) = Be^{\mu x}$.

33. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b x^{\beta} y(x)y(t)\,dt = Bx^{\mu}.}$

Частный случай уравнения 6.2.26 при $g(x) = Ax^{\beta}$, $f(x) = Bx^{\mu}$.

34. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b e^{\beta x} y(x)y(t)\,dt = Be^{\mu x}.}$

Частный случай уравнения 6.2.26 при $g(x) = Ae^{\beta x}$, $f(x) = Be^{\mu x}$.

6.1-5. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G(\cdots)\,dt = F(x)$

35. $\boldsymbol{y(x) + A\int_0^1 y(t)y(xt)\,dt = 0.}$

Частный случай уравнения 6.2.30 при $f(t) = A$, $a = 0$, $b = 1$.

1°. Решения:

$$y_1(x) = -\frac{1}{A}(2C+1)x^C, \quad y_2(x) = \frac{(I_1 - I_0)x + I_1 - I_2}{I_0 I_2 - I_1^2}x^C,$$

$$I_m = \frac{A}{2C+m+1}, \quad m = 0, 1, 2,$$

где $C \geqslant 0$ — произвольная постоянная.

Существуют более сложные решения вида $y(x) = x^C \sum\limits_{k=0}^{n} B_k x^k$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты B_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

2°. Решение:

$$y_3(x) = \frac{(I_1 - I_0)x^{\beta} + I_1 - I_2}{I_0 I_2 - I_1^2}x^C, \qquad I_m = \frac{A}{2C + m\beta + 1}, \quad m = 0, 1, 2,$$

где C, β — произвольные постоянные.

Существуют более сложные решения вида $y(x) = x^C \sum\limits_{k=0}^{n} D_k x^{k\beta}$, где C, β — произвольные постоянные, а коэффициенты D_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3°. Решение:

$$y_4(x) = \frac{x^C (J_1 \ln x - J_2)}{J_0 J_2 - J_1^2}, \qquad J_m = \int_0^1 t^{2C} (\ln t)^m\,dt, \quad m = 0, 1, 2,$$

где C — произвольная постоянная.

Существуют более сложные решения вида $y(x) = x^C \sum\limits_{k=0}^{n} E_k (\ln x)^k$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты E_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

36. $\boldsymbol{y(x) + A\int_1^{\infty} y(t)y(xt)\,dt = 0.}$

Частный случай уравнения 6.2.30 при $f(t) = A$, $a = 1$, $b = \infty$.

37. $\boldsymbol{y(x) + \lambda \int_1^\infty y(t)y(xt)\,dt = Ax^\beta.}$

Частный случай уравнения 6.2.31 при $f(t) = \lambda$, $a = 0$, $b = 1$.

38. $\boldsymbol{y(x) + A\int_0^1 y(t)y(x+\lambda t)\,dt = 0.}$

Частный случай уравнения 6.2.35 при $f(t) \equiv A$, $a = 0$, $b = 1$.

1°. Решение:
$$y(x) = \frac{C(\lambda+1)}{A[1 - e^{C(\lambda+1)}]} e^{Cx},$$
где C — произвольная постоянная.

2°. Существуют более сложные решения вида $y(x) = e^{Cx} \sum\limits_{m=0}^{n} B_m x^m$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты B_m определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

39. $\boldsymbol{y(x) + A\int_0^\infty y(t)y(x+\lambda t)\,dt = 0, \qquad \lambda > 0, \quad 0 \leqslant x < \infty.}$

Частный случай уравнения 6.2.35 при $f(t) \equiv A$, $a = 0$, $b = \infty$.

Решение:
$$y(x) = -\frac{C(\lambda+1)}{A} e^{-Cx},$$
где $C > 0$ — произвольная постоянная.

40. $\boldsymbol{y(x) + A\int_0^\infty e^{-\lambda t} y\Bigl(\frac{x}{t}\Bigr) y(t)\,dt = 0, \qquad \lambda > 0.}$

Решение: $y(x) = -\dfrac{\lambda}{A} x^C$, где C — произвольная постоянная.

41. $\boldsymbol{y(x) + A\int_0^\infty e^{-\lambda t} y\Bigl(\frac{x}{t}\Bigr) y(t)\,dt = Bx^b, \qquad \lambda > 0.}$

Решения:
$$y_1(x) = \beta_1 x^b, \qquad y_2(x) = \beta_2 x^b,$$
где β_1 и β_2 — корни квадратного уравнения $A\beta^2 + \lambda\beta - B\lambda = 0$.

6.2. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные функции

6.2-1. Уравнения вида $\int_a^b G(\cdots)\,dt = F(x)$

1. $\boldsymbol{\int_a^b g(t)y(x)y(t)\,dt = f(x).}$

Решения:
$$y(x) = \pm\lambda f(x), \qquad \lambda = \left[\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right]^{-1/2}.$$

2. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(t)y(xt)\,dt = A.$

1°. Решения*:

$$y_1(x) = \sqrt{A/I_0}, \qquad y_2(x) = -\sqrt{A/I_0},$$
$$y_3(x) = q(I_1 x - I_2), \quad y_4(x) = -q(I_1 x - I_2),$$

где

$$I_m = \int_a^b t^m f(t)\,dt, \quad q = \left(\frac{A}{I_0 I_2^2 - I_1^2 I_2}\right)^{1/2}, \qquad m = 0, 1, 2.$$

Интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k x^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

2°. Решения:

$$y_5(x) = q(I_1 x^C - I_2), \qquad y_6(x) = -q(I_1 x^C - I_2),$$
$$q = \left(\frac{A}{I_0 I_2^2 - I_1^2 I_2}\right)^{1/2}, \quad I_m = \int_a^b t^{mC} f(t)\,dt, \qquad m = 0, 1, 2,$$

где C — произвольная постоянная.

Уравнение имеет также более сложные решения вида $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k x^{kC}$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3°. Решения:

$$y_7(x) = p(J_0 \ln x - J_1), \qquad y_8(x) = -p(J_0 \ln x - J_1),$$
$$p = \left(\frac{A}{J_0^2 J_2 - J_0 J_1^2}\right)^{1/2}, \quad J_m = \int_a^b (\ln t)^m f(t)\,dt.$$

Уравнение имеет также более сложные решения вида $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} E_k (\ln x)^k$, где постоянные E_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(t)y(xt)\,dt = Ax^{\beta}.$

1°. Решения:

$$y_1(x) = \sqrt{A/I_0}\, x^{\beta}, \qquad y_2(x) = -\sqrt{A/I_0}\, x^{\beta},$$
$$y_3(x) = q(I_1 x - I_2)\, x^{\beta}, \quad y_4(x) = -q(I_1 x - I_2)\, x^{\beta},$$

где

$$I_m = \int_a^b t^{2\beta+m} f(t)\,dt, \quad q = \sqrt{\frac{A}{I_2(I_0 I_2 - I_1^2)}}, \qquad m = 0, 1, 2.$$

2°. Замена $y(x) = x^{\beta} w(x)$ приводит к уравнению вида 6.2.2:

$$\int_a^b g(t)w(t)w(xt)\,dt = A, \qquad g(x) = f(x)x^{2\beta}.$$

Поэтому рассматриваемое интегральное уравнение имеет также и другие решения.

* Аргументы нелинейных уравнений, содержащих в подынтегральном выражении сомножитель $y(xt)$, могут изменяться в следующих пределах: 1) $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ при $a = 0$, $b = 1$; 2) $1 \leqslant t < \infty$, $1 \leqslant x < \infty$ при $a = 1$, $b = \infty$; 3) $0 \leqslant t < \infty$, $0 \leqslant x < \infty$ при $a = 0$, $b = \infty$; 4) $a \leqslant t \leqslant b$, $0 \leqslant x < \infty$, где a, b — любые, удовлетворяющие условиям $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$. Случай 4) следует из случая 3), когда функция $f(t)$ отлична от нуля только на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$.

4. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(t)y(xt)\,dt = A\ln x + B.$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = p\ln x + q$. Постоянные p и q определяются из системы двух алгебраических уравнений второго порядка

$$I_1p^2 + I_0pq = A, \quad I_2p^2 + 2I_1pq + I_0q^2 = B,$$

где

$$I_m = \int_a^b f(t)(\ln t)^m\,dt, \quad m = 0, 1, 2.$$

5. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(t)y(xt)\,dt = Ax^\lambda \ln x + Bx^\lambda.$

Замена $y(x) = x^\lambda w(x)$ приводит к уравнению вида 6.2.4:

$$\int_a^b g(t)w(t)w(xt)\,dt = A\ln x + B, \qquad g(t) = f(t)t^{2\lambda}.$$

6. $\displaystyle\int_0^\infty f(t)y(t)y\Big(\frac{x}{t}\Big)\,dt = Ax^\lambda.$

Решения:

$$y_1(x) = \sqrt{\frac{A}{I}}\,x^\lambda, \quad y_2(x) = -\sqrt{\frac{A}{I}}\,x^\lambda, \qquad I = \int_0^\infty f(t)\,dt.$$

7. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(t)y(x+\lambda t)\,dt = A, \qquad \lambda > 0.$

1°. Решения*:

$$y_1(x) = \sqrt{A/I_0}, \qquad y_2(x) = -\sqrt{A/I_0},$$
$$y_3(x) = q(I_0x - I_1), \quad y_4(x) = -q(I_0x - I_1),$$

где

$$I_m = \int_a^b t^m f(t)\,dt, \quad q = \sqrt{\frac{A}{\lambda(I_0^2I_2 - I_0I_1^2)}}, \qquad m = 0, 1, 2.$$

2°. Интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_kx^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

8. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(t)y(x+\lambda t)\,dt = Ax + B, \qquad \lambda > 0.$

Решение: $y(x) = \beta x + \mu$, где постоянные β и μ определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$I_0\beta\mu + I_1\beta^2 = A, \quad I_0\mu^2 + (\lambda+1)I_1\beta\mu + \lambda I_2\beta^2 = B, \qquad I_m = \int_a^b t^m f(t)\,dt. \quad (1)$$

* Аргументы нелинейных уравнений, содержащих в подынтегральном выражении сомножитель $y(x+\lambda t)$, могут изменяться в следующих пределах: 1) $0 \leqslant t < \infty$, $0 \leqslant x < \infty$ при $a = 0$, $b = \infty$; 2) $a \leqslant t \leqslant b$, $0 \leqslant x < \infty$, где a, b — любые, удовлетворяющие условиям $0 \leqslant a < b < \infty$. Случай 2) следует из случая 1), когда функция $f(t)$ отлична от нуля только на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$.

Умножим первое уравнение на B, а второе — на $-A$, и сложим полученные равенства. В результате получим квадратное уравнение

$$AI_0z^2 + \big[(\lambda+1)AI_1 - BI_0\big]z + \lambda AI_2 - BI_1 = 0, \qquad z = \mu/\beta. \tag{2}$$

Каждому корню этого уравнения (2) в общем случае отвечает два решения системы (1). Поэтому исходное интегральное уравнение максимально может иметь четыре решения такого вида. Если дискриминант уравнения (2) меньше нуля, то интегральное уравнение таких решений не имеет.

Интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k x^k$, где постоянные β_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

9. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(t)y(x+\lambda t)\,dt = Ae^{-\beta x}, \qquad \lambda > 0.$

1°. Решения:

$$y_1(x) = \sqrt{A/I_0}\,e^{-\beta x}, \qquad y_2(x) = -\sqrt{A/I_0}\,e^{-\beta x},$$
$$y_3(x) = q(I_0x - I_1)e^{-\beta x}, \quad y_4(x) = -q(I_0x - I_1)e^{-\beta x},$$

где

$$I_m = \int_a^b t^m e^{-\beta(\lambda+1)t} f(t)\,dt, \quad q = \sqrt{\frac{A}{\lambda(I_0^2I_2 - I_0I_1^2)}}, \qquad m = 0, 1, 2.$$

2°. Уравнение имеет также более сложные решения вида $y(x) = e^{-\beta x}\sum\limits_{k=0}^{n} B_k x^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3°. Замена $y(x) = e^{-\beta x}w(x)$ приводит к уравнению вида 6.2.7:

$$\int_a^b e^{-\beta(\lambda+1)t} f(t)w(t)w(x+\lambda t)\,dt = A.$$

10. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(t)y(x-t)\,dt = A.$

1°. Решения*:

$$y_1(x) = \sqrt{A/I_0}, \qquad y_2(x) = -\sqrt{A/I_0},$$
$$y_3(x) = q(I_0x - I_1), \quad y_4(x) = -q(I_0x - I_1),$$

где

$$I_m = \int_a^b t^m f(t)\,dt, \quad q = \sqrt{\frac{A}{I_0I_1^2 - I_0^2I_2}}, \quad m = 0, 1, 2.$$

2°. Интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$, где постоянные λ_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений. При $n = 3$ такое решение указано в 6.1.18.

* Аргументы нелинейных уравнений, содержащих в подынтегральном выражении сомножитель $y(x-t)$, могут изменяться в следующих пределах: 1) $-\infty < t < \infty$, $-\infty < x < \infty$ при $a = -\infty$, $b = \infty$; 2) $a \leqslant t \leqslant b$, $-\infty \leqslant x < \infty$, где a, b — любые, удовлетворяющие условиям $-\infty < a < b < +\infty$. Случай 2) следует из случая 1), когда функция $f(t)$ отлична от нуля только на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$.

11. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(t)y(x-t)\,dt = Ax+B.$

Решение: $y(x)=\lambda x+\mu$, где постоянные λ и μ определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$I_0\lambda\mu+I_1\lambda^2=A,\quad I_0\mu^2-I_2\lambda^2=B,\qquad I_m=\int_a^b t^m f(t)\,dt,\quad m=0,1,2. \tag{1}$$

Умножим первое уравнение на B, а второе — на $-A$, и сложим полученные равенства. В результате получим квадратное уравнение

$$AI_0z^2-BI_0z-AI_2-BI_1=0,\qquad z=\mu/\lambda. \tag{2}$$

Каждому корню этого уравнения (2) в общем случае отвечает два решения системы (1). Поэтому исходное интегральное уравнение максимально может иметь четыре решения такого вида. Если дискриминант уравнения (2) меньше нуля, то интегральное уравнение таких решений не имеет.

Интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиального вида $y(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_k x^k$, где постоянные λ_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

12. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(t)y(x-t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k.$

Решения этого уравнения имеют вид

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x^k, \tag{1}$$

где постоянные λ_k находятся из системы алгебраических уравнений, которые получаются после подстановки выражения (1) в исходное интегральное уравнение в результате выделения членов при одинаковых степенях x.

13. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(x-t)y(t)\,dt = Ae^{\lambda x}.$

Решения:

$$y_1(x)=\sqrt{A/I_0}\,e^{\lambda x},\qquad y_2(x)=-\sqrt{A/I_0}\,e^{\lambda x},$$
$$y_3(x)=q(I_0x-I_1)e^{\lambda x},\quad y_4(x)=-q(I_0x-I_1)e^{\lambda x},$$

где

$$I_m=\int_a^b t^m f(t)\,dt,\quad q=\sqrt{\frac{A}{I_0I_1^2-I_0^2I_2}},\quad m=0,1,2.$$

Уравнение имеет также более сложные решения вида $y(x)=e^{\lambda x}\sum\limits_{k=0}^{n}B_k x^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

14. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(t)y(x-t)\,dt = A\operatorname{sh}\lambda x.$

Решение:

$$y(x)=p\operatorname{sh}\lambda x+q\operatorname{ch}\lambda x. \tag{1}$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$I_0pq+I_{\rm cs}(p^2-q^2)=A,\qquad I_{\rm cc}q^2-I_{\rm ss}p^2=0, \tag{2}$$

где использованы следующие обозначения:

$$I_0 = \int_a^b f(t)\,dt, \qquad I_{\rm cs} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{ch}(\lambda t)\,\mathrm{sh}(\lambda t)\,dt,$$
$$I_{\rm cc} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{ch}^2(\lambda t)\,dt, \quad I_{\rm ss} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{sh}^2(\lambda t)\,dt.$$

Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

Из второго уравнения системы (2) имеем $q = \pm\sqrt{I_{\rm ss}/I_{\rm cc}}\,p$. Исключая с помощью этого равенства величину q из первого уравнения (2), находим решения:

$$y_{1,2}(x) = p\bigl(\mathrm{sh}\,\lambda x \pm k\,\mathrm{ch}\,\lambda x\bigr), \quad y_{3,4}(x) = -p\bigl(\mathrm{sh}\,\lambda x \pm k\,\mathrm{ch}\,\lambda x\bigr),$$
$$k = \sqrt{\frac{I_{\rm ss}}{I_{\rm cc}}}, \quad p = \sqrt{\frac{A}{(1-k^2)I_{\rm cs} \pm kI_0}}.$$

15. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(t)y(x-t)\,dt = A\,\mathrm{ch}\,\lambda x.$

Решение:

$$y(x) = p\,\mathrm{sh}\,\lambda x + q\,\mathrm{ch}\,\lambda x. \qquad (1)$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$I_0 pq + I_{\rm cs}(p^2 - q^2) = 0, \qquad I_{\rm cc}q^2 - I_{\rm ss}p^2 = A, \qquad (2)$$

где использованы те же обозначения, что и в аналогичной системе для уравнения 6.2.14. Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

16. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(t)y(x-t)\,dt = A\sin\lambda x.$

Решение:

$$y(x) = p\sin\lambda x + q\cos\lambda x. \qquad (1)$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$I_0 pq + I_{\rm cs}(p^2 + q^2) = A, \qquad I_{\rm cc}q^2 - I_{\rm ss}p^2 = 0, \qquad (2)$$

где

$$I_0 = \int_a^b f(t)\,dt, \qquad I_{\rm cs} = \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\sin(\lambda t)\,dt,$$
$$I_{\rm cc} = \int_a^b f(t)\cos^2(\lambda t)\,dt, \quad I_{\rm ss} = \int_a^b f(t)\sin^2(\lambda t)\,dt.$$

Из второго уравнения системы (2) имеем $q = \pm\sqrt{I_{\rm ss}/I_{\rm cc}}\,p$. Исключая с помощью этого равенства величину q из первого уравнения (2), находим решения:

$$y_{1,2}(x) = p\bigl(\sin\lambda x \pm k\cos\lambda x\bigr), \quad y_{3,4}(x) = -p\bigl(\sin\lambda x \pm k\cos\lambda x\bigr),$$
$$k = \sqrt{\frac{I_{\rm ss}}{I_{\rm cc}}}, \quad p = \sqrt{\frac{A}{(1+k^2)I_{\rm cs} \pm kI_0}}.$$

17. $\displaystyle\int_a^b f(t)y(t)y(x-t)\,dt = A\cos\lambda x.$

Решение:

$$y(x) = p\sin\lambda x + q\cos\lambda x. \qquad (1)$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$I_0 pq + I_{\rm cs}(p^2 + q^2) = 0, \qquad I_{\rm cc}q^2 - I_{\rm ss}p^2 = A, \qquad (2)$$

где использованы те же обозначения, что и в аналогичной системе для уравнения 6.2.16. Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

18. $\displaystyle\int_0^1 y(t)y(\xi)\,dt = A, \qquad \xi = f(x)t.$

1°. Решения:

$$y_1(t) = \sqrt{A}, \qquad y_2(t) = -\sqrt{A},$$
$$y_3(t) = \sqrt{A}\,(3t-2), \qquad y_4(t) = -\sqrt{A}\,(3t-2),$$
$$y_5(t) = \sqrt{A}\,(10t^2-12t+3), \qquad y_6(t) = -\sqrt{A}\,(10t^2-12t+3).$$

2°. Интегральное уравнение имеет также и другие более сложные решения полиномиального вида $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k t^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3°. Замена $z = f(x)$ приводит к уравнению вида 6.1.12.

6.2-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x,t)y^2(t)\,dt = F(x)$

19. $\displaystyle y(x) + \int_a^b f(x)y^2(t)\,dt = 0.$

Решения: $y_1(x) = 0$ и $y_2(x) = \lambda f(x)$, где $\lambda = -\Big[\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,dt\Big]^{-1}$.

20. $\displaystyle y(x) + \int_a^b f(x)g(t)y^2(t)\,dt = 0.$

Частный случай уравнения 6.8.29.

Решения: $y_1(x) = 0$ и $y_2(x) = \lambda f(x)$, где $\lambda = -\Big[\displaystyle\int_a^b f^2(t)g(t)\,dt\Big]^{-1}$.

21. $\displaystyle y(x) + A\int_a^b y^2(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27.

Решение: $y(x) = f(x) + \lambda$, где λ определяется путем решения квадратного уравнения

$$A(b-a)\lambda^2 + (1+2AI_1)\lambda + AI_2 = 0, \quad \text{где} \quad I_1 = \int_a^b f(t)\,dt, \quad I_2 = \int_a^b f^2(t)\,dt.$$

22. $\displaystyle y(x) + \int_a^b g(t)y^2(t)\,dt = f(x).$

Частный случай уравнения 6.8.29.

Решение: $y(x) = f(x) + \lambda$, где λ определяется путем решения квадратного уравнения

$$I_0\lambda^2 + (1+2I_1)\lambda + I_2 = 0, \quad \text{где} \quad I_m = \int_a^b f^m(t)g(t)\,dt, \quad m = 0, 1, 2.$$

Разным корням отвечают разные решения.

23. $\displaystyle y(x) + \int_a^b g(x)y^2(t)\,dt = f(x).$

Решение: $y(x) = \lambda g(x) + f(x)$, где λ определяется путем решения квадратного уравнения

$$I_{gg}\lambda^2 + (1+2I_{fg})\lambda + I_{ff} = 0,$$
$$I_{gg} = \int_a^b g^2(t)\,dt, \quad I_{fg} = \int_a^b f(t)g(t)\,dt, \quad I_{ff} = \int_a^b f^2(t)\,dt.$$

24. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \big[g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)\big] y^2(t)\,dt = f(x).}$

Решение: $y(x) = \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + f(x)$, где постоянные λ_1 и λ_2 определяются путем решения алгебраической системы двух уравнений второго порядка (эту систему можно получить из более общей системы, указанной в 6.8.39).

6.2-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b \sum K_{nm}(x,t) y^n(x) y^m(t)\,dt = F(x)$

25. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b g(t)y(x)y(t)\,dt = f(x).}$

Решения:

$$y_1(x) = \lambda_1 f(x), \qquad y_2(x) = \lambda_2 f(x),$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$I\lambda^2 + \lambda - 1 = 0, \qquad I = \int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

26. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b g(x)y(x)y(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1 + \lambda g(x)},$$

где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda - \int_a^b \frac{f(t)\,dt}{1 + \lambda g(t)} = 0.$$

Разным корням отвечают разные решения интегрального уравнения.

27. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \big[g_1(t)y^2(x) + g_2(x)y(t)\big]\,dt = f(x).}$

Решение в неявном виде:

$$y(x) + Iy^2(x) + \lambda g_2(x) - f(x) = 0, \qquad I = \int_a^b g_1(t)\,dt, \tag{1}$$

где параметр λ определяются путем решения алгебраического уравнения

$$\lambda = \int_a^b y(t)\,dt. \tag{2}$$

В правую часть (2) следует подставить функцию $y(x) = y(x,\lambda)$, которая получается путем разрешения квадратного уравнения (1).

28. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \big[g_1(t)y^2(x) + g_2(x)y^2(t)\big]\,dt = f(x).}$

Решение в неявном виде:

$$y(x) + Iy^2(x) + \lambda g_2(x) - f(x) = 0, \qquad I = \int_a^b g_1(t)\,dt, \tag{1}$$

где параметр λ определяются путем решения алгебраического уравнения

$$\lambda = \int_a^b y^2(t)\,dt. \tag{2}$$

В правую часть (2) следует подставить функцию $y(x) = y(x,\lambda)$, которая получается путем разрешения квадратного уравнения (1).

29. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \big[g_{11}(x)h_{11}(t)y^2(x) + g_{12}(x)h_{12}(t)y(x)y(t) +}$
$\boldsymbol{+ g_{22}(x)h_{22}(t)y^2(t) + g_1(x)h_1(t)y(x) + g_2(x)h_2(t)y(t)\big]\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.44.

6.2-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G(\cdots)\,dt = F(x)$

30. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(xt)\,dt = 0.}$

1°. Решения:

$$y_1(x) = -\frac{1}{I_0}x^C, \quad y_2(x) = \frac{(I_1 - I_0)x + I_1 - I_2}{I_0 I_2 - I_1^2}x^C,$$
$$I_m = \int_a^b f(t)t^{2C+m}\,dt, \quad m = 0, 1, 2,$$

где C — произвольная постоянная.

Существуют более сложные решения вида $y(x) = x^C \sum\limits_{k=0}^{n} B_k x^k$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты B_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

2°. Решение:

$$y_3(x) = \frac{(I_1 - I_0)x^\beta + I_1 - I_2}{I_0 I_2 - I_1^2}x^C,$$
$$I_m = \int_a^b f(t)t^{2C+m\beta}\,dt, \quad m = 0, 1, 2,$$

где C, β — произвольные постоянные.

Существуют более сложные решения вида $y(x) = x^C \sum\limits_{k=0}^{n} D_k x^{k\beta}$, где C, β — произвольные постоянные, а коэффициенты D_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3°. Решение:

$$y_4(x) = \frac{x^C(J_1 \ln x - J_2)}{J_0 J_2 - J_1^2},$$
$$J_m = \int_a^b f(t)t^{2C}(\ln t)^m dt, \quad m = 0, 1, 2,$$

где C — произвольная постоянная.

Существуют более сложные решения вида $y(x) = x^C \sum\limits_{k=0}^{n} E_k (\ln x)^k$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты E_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

4°. Уравнение имеет также тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

5°. Замена $y(x) = x^\beta w(x)$ приводит к уравнению аналогичного вида

$$w(x) + \int_a^b g(t)w(t)w(xt)\,dt = 0, \qquad g(x) = f(x)x^{2\beta}.$$

31. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(xt)\,dt = Ax^\beta.}$

1°. Решения:

$$y_1(x) = k_1 x^\beta, \quad y_2(x) = k_2 x^\beta,$$

где k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения

$$Ik^2 + k - A = 0, \qquad I = \int_a^b f(t)t^{2\beta}\,dt.$$

2°. Решения:

$$y(x) = x^\beta(\lambda x + \mu),$$

где коэффициенты λ и μ определяются из следующей системы двух алгебраических уравнений (эта система сводится к квадратному уравнению):

$$I_2\lambda + I_1\mu + 1 = 0, \quad I_1\lambda\mu + I_0\mu^2 + \mu - A = 0,$$

где $I_m = \int_a^b f(t)t^{2\beta+m}\,dt$, $m = 0, 1, 2.$

3°. Существуют более сложные решения вида $y(x) = x^\beta \sum\limits_{m=0}^{n} B_m x^m$, где коэффициенты B_m определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

32. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(xt)\,dt = A\ln x + B.}$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = p\ln x + q$, где постоянные p и q определяются из системы двух алгебраических уравнений второго порядка.

33. $\boldsymbol{y(x) + \int_0^\infty f(t)y(t)y\Big(\frac{x}{t}\Big)\,dt = 0.}$

1°. Решение:

$$y(x) = -kx^C, \qquad k = \left[\int_0^\infty f(t)\,dt\right]^{-1},$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Уравнение имеет также тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

3°. Замена $y(x) = x^\beta w(x)$ приводит к такому же уравнению

$$w(x) + \int_0^\infty f(t)w(t)w\Big(\frac{x}{t}\Big)\,dt = 0.$$

34. $\boldsymbol{y(x) + \int_0^\infty f(t)y\Big(\frac{x}{t}\Big)y(t)\,dt = Ax^b.}$

Решения:

$$y_1(x) = \lambda_1 x^b, \qquad y_2(x) = \lambda_2 x^b,$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$I\lambda^2 + \lambda - A = 0, \qquad I = \int_0^\infty f(t)\,dt.$$

35. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(x+\lambda t)\,dt = 0, \qquad \lambda > 0.}$

1°. Решения:

$$y_1(x) = -\frac{1}{I_0}\exp(-Cx), \quad y_2(x) = \frac{I_2 - I_1 x}{I_1^2 - I_0 I_2}\exp(-Cx),$$
$$I_m = \int_a^b t^m \exp\bigl[-C(\lambda+1)t\bigr] f(t)\,dt, \qquad m = 0, 1, 2,$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Существуют более сложные решения вида $y(x) = \exp(-Cx)\sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты A_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3°. Уравнение имеет также тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

4°. Замена $y(x) = e^{\beta x} w(x)$ приводит к уравнению аналогичного вида

$$w(x) + \int_a^b g(t)w(t)w(x+\lambda t)\,dt = 0, \qquad g(t) = e^{\beta(\lambda+1)t} f(t).$$

36. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(x+\lambda t)y(t)\,dt = Ae^{-\mu x}, \qquad \lambda > 0.}$

1°. Решения:

$$y_1(x) = k_1 e^{-\mu x}, \qquad y_2(x) = k_2 e^{-\mu x},$$

где k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения

$$Ik^2 + k - A = 0, \qquad I = \int_a^b e^{-\mu(\lambda+1)t} f(t)\,dt.$$

2°. Существуют более сложные решения вида $y(x) = e^{-\mu x}\sum\limits_{m=0}^{n} B_m x^m$, где коэффициенты B_m определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3°. Замена $y(x) = e^{\beta x} w(x)$ приводит к уравнению такого же вида

$$w(x) + \int_a^b g(t)w(t)w(x-t)\,dt = Ae^{(\lambda-\beta)x}, \qquad g(t) = f(t)e^{\beta(\lambda+1)t}.$$

37. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(x-t)\,dt = 0.}$

1°. Решения:

$$y_1(x) = -\frac{1}{I_0}\exp(Cx), \quad y_2(x) = \frac{I_2 - I_1 x}{I_1^2 - I_0 I_2}\exp(Cx), \qquad I_m = \int_a^b t^m f(t)\,dt,$$

где C — произвольная постоянная, $m = 0, 1, 2$.

2°. Существуют более сложные решения вида $y(x) = \exp(Cx)\sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты A_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3°. Уравнение имеет также тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

4°. Замена $y(x) = \exp(Cx)w(x)$ приводит к уравнению такого же вида

$$w(x) + \int_a^b f(t)w(t)w(x-t)\,dt = 0.$$

38. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t)y(t)\,dt = Ae^{\lambda x}.}$

1°. Решения:

$$y_1(x) = k_1 e^{\lambda x}, \qquad y_2(x) = k_2 e^{\lambda x},$$

где k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения

$$Ik^2 + k - A = 0, \qquad I = \int_a^b f(t)\,dt.$$

2°. Замена $y(x) = e^{\beta x} w(x)$ приводит к уравнению такого же вида

$$w(x) + \int_a^b f(t)w(t)w(x-t)\,dt = Ae^{(\lambda-\beta)x}.$$

39. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(x-t)\,dt = A\operatorname{sh}\lambda x.}$

Решение:

$$y(x) = p\operatorname{sh}\lambda x + q\operatorname{ch}\lambda x. \qquad (1)$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$p + I_0 pq + I_{\rm cs}(p^2 - q^2) = A, \qquad q + I_{\rm cc}q^2 - I_{\rm ss}p^2 = 0, \qquad (2)$$

где использованы следующие обозначения:

$$I_0 = \int_a^b f(t)\,dt, \qquad I_{\rm cs} = \int_a^b f(t)\operatorname{ch}(\lambda t)\operatorname{sh}(\lambda t)\,dt,$$

$$I_{\rm cc} = \int_a^b f(t)\operatorname{ch}^2(\lambda t)\,dt, \quad I_{\rm ss} = \int_a^b f(t)\operatorname{sh}^2(\lambda t)\,dt.$$

Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

40. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(x-t)\,dt = A\operatorname{ch}\lambda x.}$

Решение:

$$y(x) = p\operatorname{sh}\lambda x + q\operatorname{ch}\lambda x. \qquad (1)$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$p + I_0 pq + I_{\rm cs}(p^2 - q^2) = 0, \qquad q + I_{\rm cc}q^2 - I_{\rm ss}p^2 = A, \qquad (2)$$

где использованы те же обозначения, что и в аналогичной системе для уравнения 6.2.39. Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

41. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(x-t)\,dt = A\sin\lambda x.}$

Решение:

$$y(x) = p\sin\lambda x + q\cos\lambda x. \qquad (1)$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$p + I_0 pq + I_{\rm cs}(p^2 + q^2) = A, \qquad q + I_{\rm cc}q^2 - I_{\rm ss}p^2 = 0, \qquad (2)$$

где использованы следующие обозначения:

$$I_0 = \int_a^b f(t)\,dt, \qquad I_{\rm cs} = \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\sin(\lambda t)\,dt,$$

$$I_{\rm cc} = \int_a^b f(t)\cos^2(\lambda t)\,dt, \quad I_{\rm ss} = \int_a^b f(t)\sin^2(\lambda t)\,dt.$$

Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

42. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(x-t)\,dt = A\cos\lambda x.}$

Решение:

$$y(x) = p\sin\lambda x + q\cos\lambda x. \tag{1}$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$p + I_0 pq + I_{\rm cs}(p^2+q^2) = 0, \qquad q + I_{\rm cc}q^2 - I_{\rm ss}p^2 = A, \tag{2}$$

где использованы те же обозначения, что и в аналогичной системе для уравнения 6.2.41. Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

6.3. Уравнения со степенной нелинейностью

6.3-1. Уравнения вида $\int_a^b G(\cdots)\,dt = F(x)$

1. $\boldsymbol{\int_a^b t^\lambda y^\mu(x) y^\beta(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = A\bigl[f(x)\bigr]^{\frac{1}{\mu}}, \qquad A = \left\{\int_a^b t^\lambda \bigl[f(t)\bigr]^{\frac{\beta}{\mu}}\,dt\right\}^{-\frac{1}{\mu+\beta}}.$$

2. $\boldsymbol{\int_a^b e^{\lambda t} y^\mu(x) y^\beta(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = A\bigl[f(x)\bigr]^{\frac{1}{\mu}}, \qquad A = \left\{\int_a^b e^{\lambda t} \bigl[f(t)\bigr]^{\frac{\beta}{\mu}}\,dt\right\}^{-\frac{1}{\mu+\beta}}.$$

3. $\boldsymbol{\int_0^\infty f(x^a t) t^b y(x^k t)\bigl[y(t)\bigr]^s\,dt = Ax^c.}$

Решение:

$$y(x) = \left(\frac{A}{I}\right)^{\frac{1}{s+1}} x^\lambda, \qquad \lambda = \frac{a+c+ab}{k-a-as},$$
$$I = \int_0^\infty f(t)t^\beta\,dt, \quad \beta = \frac{a+c+as+bk+cs}{k-a-as}.$$

6.3-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x,t)y^\beta(t)\,dt = F(x)$

4. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b t^\lambda y^\beta(t)\,dt = g(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = At^\lambda y^\beta$.

5. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b e^{\mu t} y^\beta(t)\,dt = g(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = Ae^{\mu t} y^\beta$.

6. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b e^{\lambda(x-t)} y^\beta(t)\,dt = g(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t,y) = Ay^\beta$.

7. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^b g(x) y^\beta(t)\, dt = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \lambda g(x), \qquad \lambda = \left[\int_a^b g^\beta(t)\, dt\right]^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

При $\beta > 0$ уравнение имеет также тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

8. $\boldsymbol{y(x) - \int_a^b g(x) y^\beta(t)\, dt = h(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t, y) = -y^\beta$.

9. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) y^\beta(t)\, dt = h(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t, y) = Ay^\beta$.

10. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) y^\beta(t)\, dt = h(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t, y) = Ay^\beta$.

11. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \cos(\lambda x + \mu t) y^\beta(t)\, dt = h(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t, y) = Ay^\beta$.

12. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) y^\beta(t)\, dt = h(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t, y) = Ay^\beta$.

13. $\boldsymbol{y(x) + \int_0^\infty f\left(\frac{t}{x}\right) \sqrt{y(t)}\, dt = Ax^2.}$

Решения: $y_k(x) = \beta_k^2 x^2$, где β_k $(k = 1, 2)$ — корни квадратных уравнений:

$$\beta^2 \pm I\beta - A = 0, \qquad I = \int_0^\infty z f(z)\, dz.$$

14. $\boldsymbol{y(x) - \int_0^\infty t^\lambda f\left(\frac{t}{x}\right) \big[y(t)\big]^\beta\, dt = 0, \qquad \beta \neq 1.}$

Решение:

$$y(x) = Ax^{\frac{1+\lambda}{1-\beta}}, \qquad A^{1-\beta} = \int_0^\infty z^{\frac{\lambda+\beta}{1-\beta}} f(z)\, dz.$$

15. $\boldsymbol{y(x) - \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda t} f(ax + bt) \big[y(t)\big]^\beta\, dt = 0, \qquad b \neq 0, \quad a\beta \neq -b.}$

Решение:

$$y(x) = A\exp\Big(-\frac{a\lambda}{a\beta + b}\, x\Big), \qquad A^{1-\beta} = \int_{-\infty}^\infty \exp\Big(\frac{\lambda b}{a\beta + b}\, z\Big) f(bz)\, dz.$$

6.3-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G(\cdots)\,dt = F(x)$

16. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b y^\beta(x)y^\mu(t)\,dt = f(x).}$

Решение в неявном виде:

$$y(x) + A\lambda y^\beta(x) - f(x) = 0, \tag{1}$$

где λ определяется путем решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda = \int_a^b y^\mu(t)\,dt. \tag{2}$$

В правую часть (2) следует подставить функцию $y(x) = y(x,\lambda)$, которая находится путем разрешения (1). Разным корням уравнения (2) соответствуют разные решения исходного интегрального уравнения.

17. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b g(t)y(x)y^\mu(t)\,dt = f(x).}$

Решение: $y(x) = \lambda f(x)$, где λ определяется путем решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$I\lambda^{\mu+1} + \lambda - 1 = 0, \qquad I = \int_a^b g(t)f^\mu(t)\,dt.$$

18. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b g(x)y(x)y^\mu(t)\,dt = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1+\lambda g(x)},$$

где λ является корнем алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda - \int_a^b \frac{f^\mu(t)\,dt}{[1+\lambda g(t)]^\mu} = 0.$$

Разным корням отвечают разные решения интегрального уравнения.

19. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \big[g_1(t)y^2(x) + g_2(x)y^\mu(t)\big]\,dt = f(x).}$

Решение в неявном виде:

$$y(x) + Iy^2(x) + \lambda g_2(x) - f(x) = 0, \qquad I = \int_a^b g_1(t)\,dt, \tag{1}$$

где λ определяется путем решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda = \int_a^b y^\mu(t)\,dt. \tag{2}$$

В правую часть (2) следует подставить функцию $y(x) = y(x,\lambda)$, которая получается путем разрешения квадратного уравнения (1).

20. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \big[g_1(x)h_1(t)y^k(x)y^s(t) + g_2(x)h_2(t)y^p(x)y^q(t)\big]\,dt = f(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.44.

21. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b y(xt)y^\beta(t)\,dt = 0.}$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t,y) = Ay^\beta$.

6.4. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями

6.4-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\exp[\beta y(t)]$

1. $\displaystyle y(x) + A\int_a^b \exp[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\exp(\beta y)$.

2. $\displaystyle y(x) + A\int_a^b t^\mu \exp[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = At^\mu \exp(\beta y)$.

3. $\displaystyle y(x) + A\int_a^b \exp\bigl[\mu t + \beta y(t)\bigr]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\exp(\mu t)\exp(\beta y)$.

4. $\displaystyle y(x) + A\int_a^b \exp\bigl[\lambda(x-t) + \beta y(t)\bigr]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t,y) = A\exp(\beta y)$.

5. $\displaystyle y(x) + \int_a^b g(x)\exp[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t,y) = \exp(\beta y)$.

6. $\displaystyle y(x) + A\int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t)\exp[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t,y) = A\exp(\beta y)$.

7. $\displaystyle y(x) + A\int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t)\exp[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t,y) = A\exp(\beta y)$.

8. $\displaystyle y(x) + A\int_a^b \cos(\lambda x + \mu t)\exp[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t,y) = A\exp(\beta y)$.

9. $\displaystyle y(x) + A\int_a^b \sin(\lambda x + \mu t)\exp[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t,y) = A\exp(\beta y)$.

6.4-2. Другие подынтегральные выражения

10. $\displaystyle y(x) + A\int_a^b \exp\bigl[\beta y(x) + \gamma y(t)\bigr]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x,y) = A\exp(\beta y)$, $f(t,y) = \exp(\gamma y)$.

11. $\displaystyle y(x) + A\int_a^b y(xt)\exp[\beta y(t)]\,dt = 0.$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t,y) = A\exp(\beta y)$.

6.5. Уравнения с гиперболическими нелинейностями

6.5-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{ch}[\beta y(t)]$

1. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \operatorname{ch}[\beta y(t)]\,dt = g(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\operatorname{ch}(\beta y)$.

2. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b t^\mu \operatorname{ch}^k[\beta y(t)]\,dt = g(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = At^\mu \operatorname{ch}^k(\beta y)$.

3. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \operatorname{ch}(\mu t)\operatorname{ch}[\beta y(t)]\,dt = g(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\operatorname{ch}(\mu t)\operatorname{ch}(\beta y)$.

4. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b e^{\lambda(x-t)}\operatorname{ch}[\beta y(t)]\,dt = g(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t,y) = A\operatorname{ch}(\beta y)$.

5. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b g(x)\operatorname{ch}[\beta y(t)]\,dt = h(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t,y) = \operatorname{ch}(\beta y)$.

6. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t)\operatorname{ch}[\beta y(t)]\,dt = h(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t,y) = A\operatorname{ch}(\beta y)$.

7. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t)\operatorname{ch}[\beta y(t)]\,dt = h(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t,y) = A\operatorname{ch}(\beta y)$.

8. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \cos(\lambda x + \mu t)\operatorname{ch}[\beta y(t)]\,dt = h(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t,y) = A\operatorname{ch}(\beta y)$.

9. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \sin(\lambda x + \mu t)\operatorname{ch}[\beta y(t)]\,dt = h(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t,y) = A\operatorname{ch}(\beta y)$.

6.5-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{sh}[\beta y(t)]$

10. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt = g(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\operatorname{sh}(\beta y)$.

11. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b t^\mu \operatorname{sh}^k[\beta y(t)]\,dt = g(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = At^\mu \operatorname{sh}^k(\beta y)$.

12. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{sh}(\mu t)\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\operatorname{sh}(\mu t)\operatorname{sh}(\beta y)$.

13. $y(x) + A\int_a^b e^{\lambda(x-t)}\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t,y) = A\operatorname{sh}(\beta y)$.

14. $y(x) + \int_a^b g(x)\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t,y) = \operatorname{sh}(\beta y)$.

15. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t)\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t,y) = A\operatorname{sh}(\beta y)$.

16. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t)\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t,y) = A\operatorname{sh}(\beta y)$.

17. $y(x) + A\int_a^b \cos(\lambda x + \mu t)\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t,y) = A\operatorname{sh}(\beta y)$.

18. $y(x) + A\int_a^b \sin(\lambda x + \mu t)\operatorname{sh}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t,y) = A\operatorname{sh}(\beta y)$.

6.5-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{th}[\beta y(t)]$

19. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\operatorname{th}(\beta y)$.

20. $y(x) + A\int_a^b t^{\mu}\operatorname{th}^k[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = At^{\mu}\operatorname{th}^k(\beta y)$.

21. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{th}(\mu t)\operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\operatorname{th}(\mu t)\operatorname{th}(\beta y)$.

22. $y(x) + A\int_a^b e^{\lambda(x-t)}\operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t,y) = A\operatorname{th}(\beta y)$.

23. $y(x) + \int_a^b g(x)\operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t,y) = \operatorname{th}(\beta y)$.

24. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t)\operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t,y) = A\operatorname{th}(\beta y)$.

25. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t)\operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t,y) = A\operatorname{th}(\beta y)$.

26. $y(x) + A\int_a^b \cos(\lambda x + \mu t)\operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t,y) = A\operatorname{th}(\beta y)$.

27. $y(x) + A\int_a^b \sin(\lambda x + \mu t)\operatorname{th}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t,y) = A\operatorname{th}(\beta y)$.

6.5-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{cth}[\beta y(t)]$

28. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{cth}[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\operatorname{cth}(\beta y)$.

29. $y(x) + A\int_a^b t^\mu \operatorname{cth}^k[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = At^\mu \operatorname{cth}^k(\beta y)$.

30. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{cth}(\mu t)\operatorname{cth}[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\operatorname{cth}(\mu t)\operatorname{cth}(\beta y)$.

31. $y(x) + A\int_a^b e^{\lambda(x-t)}\operatorname{cth}[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t,y) = A\operatorname{cth}(\beta y)$.

32. $y(x) + \int_a^b g(x)\operatorname{cth}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t,y) = \operatorname{cth}(\beta y)$.

33. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t)\operatorname{cth}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t,y) = A\operatorname{cth}(\beta y)$.

34. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t)\operatorname{cth}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t,y) = A\operatorname{cth}(\beta y)$.

35. $y(x) + A\int_a^b \cos(\lambda x + \mu t)\operatorname{cth}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t,y) = A\operatorname{cth}(\beta y)$.

36. $y(x) + A\int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) \operatorname{cth}[\beta y(t)]\, dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t, y) = A \operatorname{cth}(\beta y)$.

6.5-5. Другие подынтегральные выражения

37. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{ch}[\beta y(x)] \operatorname{ch}[\gamma y(t)]\, dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x, y) = A \operatorname{ch}(\beta y),\ f(t, y) = \operatorname{ch}(\gamma y)$.

38. $y(x) + A\int_a^b y(xt) \operatorname{ch}[\beta y(t)]\, dt = 0.$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t, y) = A \operatorname{ch}(\beta y)$.

39. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{sh}[\beta y(x)] \operatorname{sh}[\gamma y(t)]\, dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x, y) = A \operatorname{sh}(\beta y),\ f(t, y) = \operatorname{sh}(\gamma y)$.

40. $y(x) + A\int_a^b y(xt) \operatorname{sh}[\beta y(t)]\, dt = 0.$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t, y) = A \operatorname{sh}(\beta y)$.

41. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{th}[\beta y(x)] \operatorname{th}[\gamma y(t)]\, dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x, y) = A \operatorname{th}(\beta y),\ f(t, y) = \operatorname{th}(\gamma y)$.

42. $y(x) + A\int_a^b y(xt) \operatorname{th}[\beta y(t)]\, dt = 0.$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t, y) = A \operatorname{th}(\beta y)$.

43. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{cth}[\beta y(x)] \operatorname{cth}[\gamma y(t)]\, dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x, y) = A \operatorname{cth}(\beta y),\ f(t, y) = \operatorname{cth}(\gamma y)$.

44. $y(x) + A\int_a^b y(xt) \operatorname{cth}[\beta y(t)]\, dt = 0.$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t, y) = A \operatorname{cth}(\beta y)$.

6.6. Уравнения с логарифмическими нелинейностями

6.6-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\ln[\beta y(t)]$

1. $y(x) + A\int_a^b \ln[\beta y(t)]\, dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \ln(\beta y)$.

2. $y(x) + A\int_a^b t^\mu \ln^k[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = At^\mu \ln^k(\beta y)$.

3. $y(x) + A\int_a^b \ln(\mu t)\ln[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\ln(\mu t)\ln(\beta y)$.

4. $y(x) + A\int_a^b e^{\lambda(x-t)}\ln[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t,y) = A\ln(\beta y)$.

5. $y(x) + \int_a^b g(x)\ln[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t,y) = \ln(\beta y)$.

6. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t)\ln[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t,y) = A\ln(\beta y)$.

7. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t)\ln[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t,y) = A\ln(\beta y)$.

8. $y(x) + A\int_a^b \cos(\lambda x + \mu t)\ln[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t,y) = A\ln(\beta y)$.

9. $y(x) + A\int_a^b \sin(\lambda x + \mu t)\ln[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t,y) = A\ln(\beta y)$.

6.6-2. Другие подынтегральные выражения

10. $y(x) + A\int_a^b \ln[\beta y(x)]\ln[\gamma y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x,y) = A\ln(\beta y)$, $f(t,y) = \ln(\gamma y)$.

11. $y(x) + A\int_a^b y(xt)\ln[\beta y(t)]\,dt = 0.$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t,y) = A\ln(\beta y)$.

6.7. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями

6.7-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\cos[\beta y(t)]$

1. $y(x) + A\int_a^b \cos[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\cos(\beta y)$.

2. $y(x) + A\int_a^b t^\mu \cos^k[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = At^\mu \cos^k(\beta y)$.

3. $y(x) + A\int_a^b \cos(\mu t)\cos[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\cos(\mu t)\cos(\beta y)$.

4. $y(x) + A\int_a^b e^{\lambda(x-t)}\cos[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t,y) = A\cos(\beta y)$.

5. $y(x) + \int_a^b g(x)\cos[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t,y) = \cos(\beta y)$.

6. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t)\cos[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t,y) = A\cos(\beta y)$.

7. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t)\cos[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t,y) = A\cos(\beta y)$.

8. $y(x) + A\int_a^b \cos(\lambda x + \mu t)\cos[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t,y) = A\cos(\beta y)$.

9. $y(x) + A\int_a^b \sin(\lambda x + \mu t)\cos[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t,y) = A\cos(\beta y)$.

6.7-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\sin[\beta y(t)]$

10. $y(x) + A\int_a^b \sin[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\sin(\beta y)$.

11. $y(x) + A\int_a^b t^\mu \sin^k[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = At^\mu \sin^k(\beta y)$.

12. $y(x) + A\int_a^b \sin(\mu t)\sin[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\sin(\mu t)\sin(\beta y)$.

13. $y(x) + A\int_a^b e^{\lambda(x-t)}\sin[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t,y) = A\sin(\beta y)$.

14. $y(x) + \int_a^b g(x) \sin[\beta y(t)]\, dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t,y) = \sin(\beta y)$.

15. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) \sin[\beta y(t)]\, dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t,y) = A\sin(\beta y)$.

16. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) \sin[\beta y(t)]\, dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t,y) = A\sin(\beta y)$.

17. $y(x) + A\int_a^b \cos(\lambda x + \mu t) \sin[\beta y(t)]\, dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t,y) = A\sin(\beta y)$.

18. $y(x) + A\int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) \sin[\beta y(t)]\, dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t,y) = A\sin(\beta y)$.

6.7-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{tg}[\beta y(t)]$

19. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{tg}[\beta y(t)]\, dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\operatorname{tg}(\beta y)$.

20. $y(x) + A\int_a^b t^\mu \operatorname{tg}^k[\beta y(t)]\, dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = At^\mu \operatorname{tg}^k(\beta y)$.

21. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{tg}(\mu t) \operatorname{tg}[\beta y(t)]\, dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\operatorname{tg}(\mu t)\operatorname{tg}(\beta y)$.

22. $y(x) + A\int_a^b e^{\lambda(x-t)} \operatorname{tg}[\beta y(t)]\, dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t,y) = A\operatorname{tg}(\beta y)$.

23. $y(x) + \int_a^b g(x) \operatorname{tg}[\beta y(t)]\, dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t,y) = \operatorname{tg}(\beta y)$.

24. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) \operatorname{tg}[\beta y(t)]\, dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t,y) = A\operatorname{tg}(\beta y)$.

25. $y(x) + A\int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) \operatorname{tg}[\beta y(t)]\, dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t,y) = A\operatorname{tg}(\beta y)$.

26. $y(x) + A\int_a^b \cos(\lambda x + \mu t)\,\mathrm{tg}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t,y) = A\,\mathrm{tg}(\beta y)$.

27. $y(x) + A\int_a^b \sin(\lambda x + \mu t)\,\mathrm{tg}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t,y) = A\,\mathrm{tg}(\beta y)$.

6.7-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\mathrm{ctg}[\beta y(t)]$

28. $y(x) + A\int_a^b \mathrm{ctg}[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\,\mathrm{ctg}(\beta y)$.

29. $y(x) + A\int_a^b t^\mu\,\mathrm{ctg}^k[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = At^\mu\,\mathrm{ctg}^k(\beta y)$.

30. $y(x) + A\int_a^b \mathrm{ctg}(\mu t)\,\mathrm{ctg}[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t,y) = A\,\mathrm{ctg}(\mu t)\,\mathrm{ctg}(\beta y)$.

31. $y(x) + A\int_a^b e^{\lambda(x-t)}\,\mathrm{ctg}[\beta y(t)]\,dt = g(x).$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t,y) = A\,\mathrm{ctg}(\beta y)$.

32. $y(x) + \int_a^b g(x)\,\mathrm{ctg}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t,y) = \mathrm{ctg}(\beta y)$.

33. $y(x) + A\int_a^b \mathrm{ch}(\lambda x + \mu t)\,\mathrm{ctg}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t,y) = A\,\mathrm{ctg}(\beta y)$.

34. $y(x) + A\int_a^b \mathrm{sh}(\lambda x + \mu t)\,\mathrm{ctg}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t,y) = A\,\mathrm{ctg}(\beta y)$.

35. $y(x) + A\int_a^b \cos(\lambda x + \mu t)\,\mathrm{ctg}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t,y) = A\,\mathrm{ctg}(\beta y)$.

36. $y(x) + A\int_a^b \sin(\lambda x + \mu t)\,\mathrm{ctg}[\beta y(t)]\,dt = h(x).$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t,y) = A\,\mathrm{ctg}(\beta y)$.

6.7-5. Другие подынтегральные выражения

37. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \cos[\beta y(x)]\cos[\gamma y(t)]\,dt = h(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x,y) = A\cos(\beta y)$, $f(t,y) = \cos(\gamma y)$.

38. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b y(xt)\cos[\beta y(t)]\,dt = 0.}$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t,y) = A\cos(\beta y)$.

39. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \sin[\beta y(x)]\sin[\gamma y(t)]\,dt = h(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x,y) = A\sin(\beta y)$, $f(t,y) = \sin(\gamma y)$.

40. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b y(xt)\sin[\beta y(t)]\,dt = 0.}$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t,y) = A\sin(\beta y)$.

41. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \operatorname{tg}[\beta y(x)]\operatorname{tg}[\gamma y(t)]\,dt = h(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x,y) = A\operatorname{tg}(\beta y)$, $f(t,y) = \operatorname{tg}(\gamma y)$.

42. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b y(xt)\operatorname{tg}[\beta y(t)]\,dt = 0.}$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t,y) = A\operatorname{tg}(\beta y)$.

43. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b \operatorname{ctg}[\beta y(x)]\operatorname{ctg}[\gamma y(t)]\,dt = h(x).}$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x,y) = A\operatorname{ctg}(\beta y)$, $f(t,y) = \operatorname{ctg}(\gamma y)$.

44. $\boldsymbol{y(x) + A\int_a^b y(xt)\operatorname{ctg}[\beta y(t)]\,dt = 0.}$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t,y) = A\operatorname{ctg}(\beta y)$.

6.8. Уравнения с нелинейностями общего вида

6.8-1. Уравнения вида $\int_a^b G(\cdots)\,dt = F(x)$

1. $\boldsymbol{\int_a^b y(x) f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(x).}$

Решение: $y(x) = \lambda g(x)$, где λ определяется из следующего алгебраического (или трансцендентного) уравнения: $\lambda\int_a^b f\bigl(t, \lambda g(t)\bigr)\,dt = 1$.

2. $\boldsymbol{\int_a^b y^k(x) f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(x).}$

Решение: $y(x) = \lambda[g(x)]^{1/k}$, где λ определяется из следующего алгебраического (или трансцендентного) уравнения: $\lambda^k\int_a^b f\bigl(t, \lambda g^{1/k}(t)\bigr)\,dt = 1$.

3. $\displaystyle\int_a^b \varphi\bigl(y(x)\bigr) f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt = g(x).$

Решение в неявном виде:

$$\lambda\varphi\bigl(y(x)\bigr) - g(x) = 0, \tag{1}$$

где λ определяется из алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda - F(\lambda) = 0, \qquad F(\lambda) = \int_a^b f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt. \tag{2}$$

В уравнение (2) следует подставить функцию $y(x) = y(x, \lambda)$, которая получается путем разрешения (1).

Число решений интегрального уравнения определяется числом решений, полученных из (1) и (2).

4. $\displaystyle\int_a^b y(xt) f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt = A.$

1°. Решения: $y(x) = \lambda_k$, где λ_k — корни следующего алгебраического (или трансцендентного) уравнения: $\displaystyle\lambda \int_a^b f(t, \lambda)\, dt = A.$

2°. Решения: $y(x) = px + q$, где p и q определяются из системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\int_a^b tf(t, pt + q)\, dt = 0, \qquad q\int_a^b f(t, pt + q)\, dt = A.$$

При $f\bigl(t, y(t)\bigr) = \bar{f}(t)y(t)$ решения этой системы см. в 6.2.2.

3°. Интегральное уравнение может иметь также и другие решения полиномиального вида $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k x^k$, где постоянные B_k определяются из соответствующей системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений.

4°. Интегральное уравнение может иметь решения логарифмического вида, аналогичные указанным в п. 3° для уравнения 6.2.2.

5. $\displaystyle\int_a^b y(xt) f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt = Ax + B.$

1°. Решение:

$$y(x) = px + q, \tag{1}$$

где p и q определяются из системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$p\int_a^b tf(t, pt + q)\, dt - A = 0, \qquad q\int_a^b f(t, pt + q)\, dt - B = 0. \tag{2}$$

Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

2°. Интегральное уравнение может иметь также и другие решения полиномиального вида $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k x^k$, где постоянные B_k определяются из соответствующей системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений.

6. $\displaystyle\int_a^b y(xt)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = Ax^\beta.$

Решение:

$$y(x) = kx^\beta, \qquad (1)$$

где k — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$kF(k) - A = 0, \qquad F(k) = \int_a^b t^\beta f\bigl(t, kt^\beta\bigr)\,dt. \qquad (2)$$

Каждому корню k_n уравнения (2) отвечает соответствующее решение $y_n = y_n(x)$ нелинейного интегрального уравнения, которое находится по формуле (1).

7. $\displaystyle\int_a^b y(xt)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = A\ln x + B.$

Решение:

$$y(x) = p\ln x + q, \qquad (1)$$

где p и q определяются из системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$p\int_a^b f(t,\, p\ln t + q)\,dt - A = 0, \qquad \int_a^b (p\ln t + q)f(t,\, p\ln t + q)\,dt - B = 0. \qquad (2)$$

Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

8. $\displaystyle\int_a^b y(xt)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = Ax^\beta \ln x.$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = px^\beta \ln x + qx^\beta$, где p и q — некоторые постоянные.

9. $\displaystyle\int_a^b y(xt)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = A\cos(\beta\ln x).$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = p\cos(\beta\ln x) + q\sin(\beta\ln x)$, где p и q — некоторые постоянные.

10. $\displaystyle\int_a^b y(xt)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = A\sin(\beta\ln x).$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = p\cos(\beta\ln x) + q\sin(\beta\ln x)$, где p и q — некоторые постоянные.

11. $\displaystyle\int_a^b y(xt)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = Ax^\beta\cos(\beta\ln x) + Bx^\beta\sin(\beta\ln x).$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = px^\beta\cos(\beta\ln x) + qx^\beta\sin(\beta\ln x)$, где p и q — некоторые постоянные.

12. $\displaystyle\int_a^b y(x+\beta t)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = Ax + B, \qquad \beta > 0.$

Решение:

$$y(x) = px + q, \qquad (1)$$

где p и q определяются из системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$p\int_a^b f(t, pt+q)\,dt - A = 0, \qquad \int_a^b (\beta pt + q)f(t, pt+q)\,dt - B = 0. \qquad (2)$$

Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

13. $\displaystyle\int_a^b y(x+\beta t)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = Ae^{-\lambda x}, \qquad \beta>0.$

Решения:

$$y_n(x) = k_n e^{-\lambda x},$$

где k_n — корни алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$kF(k)-A=0, \qquad F(k)=\int_a^b f\bigl(t,ke^{-\lambda t}\bigr)e^{-\beta\lambda t}\,dt.$$

14. $\displaystyle\int_a^b y(x+\beta t)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = A\cos\lambda x, \qquad \beta>0.$

Это уравнение имеет решения вида $y(x)=p\sin\lambda x+q\cos\lambda x$, где p и q — некоторые постоянные.

15. $\displaystyle\int_a^b y(x+\beta t)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = A\sin\lambda x, \qquad \beta>0.$

Это уравнение имеет решения вида $y(x)=p\sin\lambda x+q\cos\lambda x$, где p и q — некоторые постоянные.

16. $\displaystyle\int_a^b y(x+\beta t)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = e^{-\mu x}(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x), \qquad \beta>0.$

Это уравнение имеет решения вида $y(x)=e^{-\mu x}(p\sin\lambda x+q\cos\lambda x)$, где p и q — некоторые постоянные.

17. $\displaystyle\int_a^b y(x-t)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = Ax+B.$

Это уравнение имеет решения вида $y(x)=px+q$, где p и q — некоторые постоянные.

18. $\displaystyle\int_a^b y(x-t)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = Ae^{\lambda x}.$

Это уравнение имеет решения вида $y(x)=pe^{\lambda x}$, где p — некоторая постоянная.

19. $\displaystyle\int_a^b y(x-t)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = A\cos\lambda x.$

Это уравнение имеет решения вида $y(x)=p\sin\lambda x+q\cos\lambda x$, где p и q — некоторые постоянные.

20. $\displaystyle\int_a^b y(x-t)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt = e^{-\mu x}(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x).$

Это уравнение имеет решения вида $y(x)=e^{-\mu x}(p\sin\lambda x+q\cos\lambda x)$, где p и q — некоторые постоянные.

6.8-2. Уравнения вида $y(x)+\int_a^b K(x,t)G\bigl(y(t)\bigr)\,dt=F(x)$

21. $\displaystyle y(x)+\int_a^b |x-t|f\bigl(y(t)\bigr)\,dt = Ax^2+Bx+C.$

Частный случай уравнения 6.8.35 при $f(t,y)=f(y)$, $g(x)=Ax^2+Bx+C$.

Функция $y=y(x)$ удовлетворяет автономному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx}+2f(y)=2A.$$

Его решение записывается в неявном виде:

$$\int_{y_a}^{y} \frac{du}{\sqrt{w_a^2 + 4A(u - y_a) - 4F(u, y_a)}} = \pm(x - a), \qquad F(u, v) = \int_v^u f(t)\,dt, \qquad (1)$$

где $y_a = y(a)$, $w_a = y'_x(a)$ — постоянные интегрирования. Эти величины вместе с аналогичными неизвестными $y_b = y(b)$, $w_b = y'_x(b)$ определяются путем решения алгебраической (или трансцендентной) системы уравнений

$$\begin{aligned} &y_a + y_b - (a - b)w_a = (b^2 + 2ab - a^2)A + 2bB + 2C,\\ &w_a + w_b = 2(a + b)A + 2B,\\ &w_b^2 = w_a^2 + 4A(y_b - y_a) - 4F(y_b, y_a),\\ &\int_{y_a}^{y_b} \frac{du}{\sqrt{w_a^2 + 4A(u - y_a) - 4F(u, y_a)}} = \pm(b - a). \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь первое уравнение получено из второго условия (5) в 6.8.35, а второе уравнение — из условия (6) в 6.8.35; третье и четвертое уравнения являются следствиями (1).

Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

22. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b e^{\lambda|x-t|} f\big(y(t)\big)\,dt = A + Be^{\lambda x} + Ce^{-\lambda x}.}$

Частный случай уравнения 6.8.36 при $f(t, y) = f(y)$, $g(x) = A + Be^{\lambda x} + Ce^{-\lambda x}$.

Функция $y = y(x)$ удовлетворяет автономному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + 2\lambda f(y) - \lambda^2 y = -\lambda^2 A. \qquad (1)$$

Его решение записывается в неявном виде:

$$\int_{y_a}^{y} \frac{du}{\sqrt{w_a^2 + \lambda^2(u^2 - y_a^2) - 2A\lambda^2(u - y_a) - 4\lambda F(u, y_a)}} = \pm(x - a), \quad F(u, v) = \int_v^u f(t)\,dt, \qquad (2)$$

где $y_a = y(a)$, $w_a = y'_x(a)$ — постоянные интегрирования. Эти величины вместе с аналогичными неизвестными $y_b = y(b)$, $w_b = y'_x(b)$ определяются путем решения алгебраической (или трансцендентной) системы уравнений

$$\begin{aligned} &w_a + \lambda y_a = A\lambda + 2B\lambda e^{\lambda a},\\ &w_b - \lambda y_b = -A\lambda - 2C\lambda e^{-\lambda b},\\ &w_b^2 = w_a^2 + \lambda^2(y_b^2 - y_a^2) - 2A\lambda^2(y_b - y_a) - 4\lambda F(y_b, y_a),\\ &\int_{y_a}^{y_b} \frac{du}{\sqrt{w_a^2 + \lambda^2(u^2 - y_a^2) - 2A\lambda^2(u - y_a) - 4\lambda F(u, y_a)}} = \pm(b - a). \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь первое и второе уравнения получены из условий (5) в 6.8.86, а третье и четвертое уравнения являются следствиями (2).

Различным решениям системы (3) соответствуют различные решения интегрального уравнения.

23. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b e^{\lambda|x-t|} f\big(y(t)\big)\,dt = \beta\,\mathrm{ch}(\lambda x).}$

Частный случай уравнения 6.8.22 при $A = 0$, $B = C = \frac{1}{2}\beta$.

24. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b e^{\lambda|x-t|} f\big(y(t)\big)\,dt = \beta\,\mathrm{sh}(\lambda x).}$

Частный случай уравнения 6.8.22 при $A = 0$, $B = \frac{1}{2}\beta$, $C = -\frac{1}{2}\beta$.

25. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) f\big(y(t)\big)\,dt = A + B\operatorname{ch}(\lambda x) + C\operatorname{sh}(\lambda x).}$

Частный случай уравнения 6.8.37 при $f(t,y) = f(y)$, $g(x) = A + B\operatorname{ch}(\lambda x) + C\operatorname{sh}(\lambda x)$.

Функция $y = y(x)$ удовлетворяет автономному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + 2\lambda f(y) - \lambda^2 y = -\lambda^2 A.$$

Его решение записывается в неявном виде:

$$\int_{y_a}^{y} \frac{du}{\sqrt{w_a^2 + \lambda^2(u^2 - y_a^2) - 2A\lambda^2(u - y_a) - 4\lambda F(u, y_a)}} = \pm(x-a), \quad F(u,v) = \int_v^u f(t)\,dt,$$

где $y_a = y(a)$, $w_a = y'_x(a)$ — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий (5) в 6.8.37.

26. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \sin(\lambda|x-t|) f\big(y(t)\big)\,dt = A + B\cos(\lambda x) + C\sin(\lambda x).}$

Частный случай уравнения 6.8.38 при $f(t,y) = f(y)$, $g(x) = A + B\cos\lambda x + C\sin\lambda x$.

Функция $y = y(x)$ удовлетворяет автономному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + 2\lambda f(y) + \lambda^2 y = \lambda^2 A.$$

Его решение записывается в неявном виде:

$$\int_{y_a}^{y} \frac{du}{\sqrt{w_a^2 - \lambda^2(u^2 - y_a^2) + 2A\lambda^2(u - y_a) - 4\lambda F(u, y_a)}} = \pm(x-a), \quad F(u,v) = \int_v^u f(t)\,dt,$$

где $y_a = y(a)$, $w_a = y'_x(a)$ — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий (5) в 6.8.38.

6.8-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x,t) G\big(t, y(t)\big)\,dt = F(x)$

27. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b f\big(t, y(t)\big)\,dt = g(x).}$

Решение: $y(x) = g(x) + \lambda$, где λ определяется из алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda + F(\lambda) = 0, \qquad F(\lambda) = \int_a^b f\big(t,\, g(t) + \lambda\big)\,dt.$$

28. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b e^{\lambda(x-t)} f\big(t, y(t)\big)\,dt = g(x).}$

Решение: $y(x) = \beta e^{\lambda x} + g(x)$, где λ определяется из алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\beta + F(\beta) = 0, \qquad F(\beta) = \int_a^b e^{-\lambda t} f\big(t,\, \beta e^{\lambda t} + g(t)\big)\,dt.$$

29. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b g(x) f\big(t, y(t)\big)\,dt = h(x).}$

Решение: $y(x) = \lambda g(x) + h(x)$, где λ определяется из алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda + F(\lambda) = 0, \qquad F(\lambda) = \int_a^b f\big(t,\, \lambda g(t) + h(t)\big)\,dt.$$

30. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b (Ax + Bt) f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x).}$

Решение: $y(x) = g(x) + \lambda x + \mu$, где постоянные λ и μ определяются путем решения алгебраической (или трансцендентной) системы уравнений

$$\lambda + A \int_a^b f\big(t,\, g(t) + \lambda t + \mu\big)\, dt = 0, \qquad \mu + B \int_a^b t f\big(t,\, g(t) + \lambda t + \mu\big)\, dt = 0.$$

31. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) f\big(t, y(t)\big)\, dt = h(x).}$

Используя формулу $\operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) = \operatorname{ch}(\lambda x)\operatorname{ch}(\mu t) + \operatorname{sh}(\mu t)\operatorname{sh}(\lambda x)$, приходим к уравнению вида 6.8.39:

$$y(x) + \int_a^b \big[\operatorname{ch}(\lambda x) f_1\big(t, y(t)\big) + \operatorname{sh}(\lambda x) f_2\big(t, y(t)\big)\big]\, dt = h(x),$$
$$f_1\big(t, y(t)\big) = \operatorname{ch}(\mu t) f\big(t, y(t)\big), \quad f_2\big(t, y(t)\big) = \operatorname{sh}(\mu t) f\big(t, y(t)\big).$$

32. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) f\big(t, y(t)\big)\, dt = h(x).}$

Используя формулу $\operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) = \operatorname{ch}(\lambda x)\operatorname{sh}(\mu t) + \operatorname{ch}(\mu t)\operatorname{sh}(\lambda x)$, приходим к уравнению вида 6.8.39:

$$y(x) + \int_a^b \big[\operatorname{ch}(\lambda x) f_1\big(t, y(t)\big) + \operatorname{sh}(\lambda x) f_2\big(t, y(t)\big)\big]\, dt = h(x),$$
$$f_1\big(t, y(t)\big) = \operatorname{sh}(\mu t) f\big(t, y(t)\big), \quad f_2\big(t, y(t)\big) = \operatorname{ch}(\mu t) f\big(t, y(t)\big).$$

33. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \cos(\lambda x + \mu t) f\big(t, y(t)\big)\, dt = h(x).}$

Используя формулу $\cos(\lambda x + \mu t) = \cos(\lambda x)\cos(\mu t) - \sin(\mu t)\sin(\lambda x)$, приходим к уравнению вида 6.8.39:

$$y(x) + \int_a^b \big[\cos(\lambda x) f_1\big(t, y(t)\big) + \sin(\lambda x) f_2\big(t, y(t)\big)\big]\, dt = h(x),$$
$$f_1\big(t, y(t)\big) = \cos(\mu t) f\big(t, y(t)\big), \quad f_2\big(t, y(t)\big) = -\sin(\mu t) f\big(t, y(t)\big).$$

34. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) f\big(t, y(t)\big)\, dt = h(x).}$

Используя формулу $\sin(\lambda x + \mu t) = \cos(\lambda x)\sin(\mu t) + \cos(\mu t)\sin(\lambda x)$, приходим к уравнению вида 6.8.39:

$$y(x) + \int_a^b \big[\cos(\lambda x) f_1\big(t, y(t)\big) + \sin(\lambda x) f_2\big(t, y(t)\big)\big]\, dt = h(x),$$
$$f_1\big(t, y(t)\big) = \sin(\mu t) f\big(t, y(t)\big), \quad f_2\big(t, y(t)\big) = \cos(\mu t) f\big(t, y(t)\big).$$

35. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b |x - t| f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x (x - t) f\big(t, y(t)\big)\, dt + \int_x^b (t - x) f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по x, имеем

$$y'_x(x) + \int_a^x f\big(t, y(t)\big)\, dt - \int_x^b f\big(t, y(t)\big)\, dt = g'_x(x). \tag{2}$$

Дифференцируя (2), приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:
$$y''_{xx} + 2f(x,y) = g''_{xx}(x). \tag{3}$$
2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Считаем, что $-\infty < a < b < \infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:
$$\begin{aligned} y(a) + \int_a^b (t-a) f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt &= g(a), \\ y(b) + \int_a^b (b-t) f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt &= g(b). \end{aligned} \tag{4}$$
Выразим из уравнения (3) функцию $f(x,y)$ и подставим в (4). После интегрирования по частям получим искомые граничные условия для функции $y(x)$:
$$\begin{aligned} y(a) + y(b) + (b-a)\bigl[g'_x(b) - y'_x(b)\bigr] &= g(a) + g(b), \\ y(a) + y(b) + (a-b)\bigl[g'_x(a) - y'_x(a)\bigr] &= g(a) + g(b). \end{aligned} \tag{5}$$
Отметим полезное следствие равенств (5):
$$y'_x(a) + y'_x(b) = g'_x(a) + g'_x(b), \tag{6}$$
которое можно использовать вместе с одним из условий (5).

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения (этих решений может быть несколько). Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

36. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b e^{\lambda|x-t|} f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим
$$y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt + \int_x^b e^{\lambda(t-x)} f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(x). \tag{1}$$
Дифференцируя (1) дважды по x, имеем
$$y''_{xx}(x) + 2\lambda f\bigl(x, y(x)\bigr) + \lambda^2 \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt + \lambda^2 \int_x^b e^{\lambda(t-x)} f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g''_{xx}(x). \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:
$$y''_{xx} + 2\lambda f(x,y) - \lambda^2 y = g''_{xx}(x) - \lambda^2 g(x). \tag{3}$$
2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Считаем, что $-\infty < a < b < \infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:
$$\begin{aligned} y(a) + e^{-\lambda a} \int_a^b e^{\lambda t} f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt &= g(a), \\ y(b) + e^{\lambda b} \int_a^b e^{-\lambda t} f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt &= g(b). \end{aligned} \tag{4}$$
Выразим из уравнения (3) функцию $f(x,y)$ и подставим в (4). После интегрирования по частям получим
$$\begin{aligned} &e^{\lambda b}\varphi'_x(b) - e^{\lambda a}\varphi'_x(a) = \lambda e^{\lambda a}\varphi(a) + \lambda e^{\lambda b}\varphi(b), \qquad \varphi(x) = y(x) - g(x); \\ &e^{-\lambda b}\varphi'_x(b) - e^{-\lambda a}\varphi'_x(a) = \lambda e^{-\lambda a}\varphi(a) + \lambda e^{-\lambda b}\varphi(b). \end{aligned}$$
Отсюда находятся граничные условия для функции $y(x)$:
$$\varphi'_x(a) + \lambda\varphi(a) = 0, \quad \varphi'_x(b) - \lambda\varphi(b) = 0; \qquad \varphi(x) = y(x) - g(x). \tag{5}$$

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения (этих решений может быть несколько). Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

37. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt + \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda(t-x)] f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) дважды по x, имеем

$$\begin{aligned} y''_{xx}(x) + 2\lambda f\bigl(x, y(x)\bigr) + \lambda^2 \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt+ \\ + \lambda^2 \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda(t-x)] f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g''_{xx}(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda f(x, y) - \lambda^2 y = g''_{xx}(x) - \lambda^2 g(x). \tag{3}$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Считаем, что $-\infty < a < b < \infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + \int_a^b \operatorname{sh}[\lambda(t-a)] f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(a), \\ y(b) + \int_a^b \operatorname{sh}[\lambda(b-t)] f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(b). \end{aligned} \tag{4}$$

Выразим из уравнения (3) функцию $f(x, y)$ и подставим в (4). После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} &\operatorname{sh}[\lambda(b-a)]\varphi'_x(b) - \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b-a)]\varphi(b) = \lambda\varphi(a), \quad \varphi(x) = y(x) - g(x); \\ &\operatorname{sh}[\lambda(b-a)]\varphi'_x(a) + \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b-a)]\varphi(a) = -\lambda\varphi(b). \end{aligned} \tag{5}$$

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения (этих решений может быть несколько). Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

38. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b \sin(\lambda|x-t|)\, f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.}$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt + \int_x^b \sin[\lambda(t-x)] f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(x). \tag{1}$$

Дифференцируя (1) дважды по x, имеем

$$\begin{aligned} y''_{xx}(x) + 2\lambda f\bigl(x, y(x)\bigr) - \lambda^2 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt- \\ - \lambda^2 \int_x^b \sin[\lambda(t-x)] f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g''_{xx}(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda f(x, y) + \lambda^2 y = g''_{xx}(x) + \lambda^2 g(x). \tag{3}$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Считаем, что $-\infty < a < b < \infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + \int_a^b \sin[\lambda(t-a)]\, f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(a), \\ y(b) + \int_a^b \sin[\lambda(b-t)]\, f\bigl(t, y(t)\bigr)\,dt = g(b). \end{aligned} \tag{4}$$

Выразим из уравнения (3) функцию $f(x,y)$ и подставим в (4). После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} &\sin[\lambda(b-a)]\,\varphi'_x(b) - \lambda\cos[\lambda(b-a)]\,\varphi(b) = \lambda\varphi(a), \quad \varphi(x) = y(x) - g(x);\\ &\sin[\lambda(b-a)]\,\varphi'_x(a) + \lambda\cos[\lambda(b-a)]\,\varphi(a) = -\lambda\varphi(b). \end{aligned} \tag{5}$$

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения (этих решений может быть несколько). Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

6.8-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G\big(x,t,y(t)\big)\,dt = F(x)$

39. $\displaystyle y(x) + \int_a^b \big[g_1(x)f_1\big(t,y(t)\big) + g_2(x)f_2\big(t,y(t)\big)\big]\,dt = h(x).$

Решение:

$$y(x) = h(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x),$$

где постоянные λ_1 и λ_2 определяется путем решения алгебраической (или трансцендентной) системы уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \int_a^b f_1\big(t,\,h(t) + \lambda_1 g_1(t) + \lambda_2 g_2(t)\big)\,dt = 0,\\ \lambda_2 + \int_a^b f_2\big(t,\,h(t) + \lambda_1 g_1(t) + \lambda_2 g_2(t)\big)\,dt = 0. \end{aligned}$$

40. $\displaystyle y(x) + \int_a^b \Bigg[\sum_{k=1}^n g_k(x)f_k\big(t,y(t)\big)\Bigg]\,dt = h(x).$

Решение:

$$y(x) = h(x) + \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k(x),$$

где постоянные λ_k определяется путем решения алгебраической (или трансцендентной) системы уравнений

$$\lambda_m + \int_a^b f_m\Big(t,\,h(t) + \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k(t)\Big)\,dt = 0; \qquad m = 1,\,\dots,\,n.$$

Различным корням этой системы отвечают различные решения интегрального уравнения.

⊙ *Литература*: А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

6.8-5. Уравнения вида $F\big(x,y(x)\big) + \int_a^b G\big(x,t,y(x),y(t)\big)\,dt = 0$

41. $\displaystyle y(x) + \int_a^b y(x)f\big(t,y(t)\big)\,dt = g(x).$

Решение: $y(x) = \lambda g(x)$, где λ определяется из алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda + \lambda F(\lambda) - 1 = 0, \qquad F(\lambda) = \int_a^b f\big(t,\lambda g(t)\big)\,dt.$$

42. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b g(x)y(x)f\big(t, y(t)\big)\,dt = h(x).}$

Решение: $y(x) = \dfrac{h(x)}{1+\lambda g(x)}$, где λ определяется из алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda - F(\lambda) = 0, \qquad F(\lambda) = \int_a^b f\left(t, \frac{h(t)}{1+\lambda g(t)}\right) dt.$$

43. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b g\big(x, y(x)\big) f\big(t, y(t)\big)\,dt = h(x).}$

Решение в неявном виде:

$$y(x) + \lambda g\big(x, y(x)\big) - h(x) = 0, \tag{1}$$

где λ определяется из алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda - F(\lambda) = 0, \qquad F(\lambda) = \int_a^b f\big(t, y(t)\big)\,dt. \tag{2}$$

В уравнение (2) следует подставить функцию $y(x) = y(x, \lambda)$, которая получается путем разрешения (1).

Число решений интегрального уравнения определяется числом решений, полученных из (1), (2).

44. $\boldsymbol{f\big(x, y(x)\big) + \int_a^b \Big[\sum_{k=1}^{n} g_k\big(x, y(x)\big) h_k\big(t, y(t)\big)\Big]\,dt = 0.}$

Решение в неявном виде:

$$f\big(x,\, y(x)\big) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k\big(x, y(x)\big) = 0, \tag{1}$$

где λ_k определяются путем решения системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{gathered} \lambda_k - H_k(\vec{\lambda}) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n; \\ H_k(\vec{\lambda}) = \int_a^b h_k\big(t, y(t)\big)\,dt, \quad \vec{\lambda} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}. \end{gathered} \tag{2}$$

В систему (2) следует подставить функцию $y(x) = y(x, \vec{\lambda})$, которая получается путем разрешения (1).

Число решений интегрального уравнения определяется числом решений, полученных из (1), (2).

6.8-6. Другие уравнения

45. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(xt) f\big(t, y(t)\big)\,dt = 0.}$

1°. Решение:

$$y(x) = kx^C, \tag{1}$$

где C — произвольная постоянная, а зависимость $k = k(C)$ определяется путем решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$1 + \int_a^b t^C f\big(t, kt^C\big)\,dt = 0. \tag{2}$$

Каждому корню уравнения (2) отвечает соответствующее решение нелинейного интегрального уравнения, которое находится по формуле (1).

2°. Интегральное уравнение может иметь и другие решения, аналогичные указанным в пп. 1°–3° для уравнения 6.2.30.

46. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(xt) f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt = Ax + B.}$

Решение:

$$y(x) = px + q, \tag{1}$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + p \int_a^b t f(t, pt + q)\, dt - A &= 0, \\ q + q \int_a^b f(t, pt + q)\, dt - B &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

47. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(xt) f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt = Ax^\beta.}$

Решение:

$$y(x) = kx^\beta, \tag{1}$$

где k — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$k + kF(k) - A = 0, \qquad F(k) = \int_a^b t^\beta f\bigl(t, kt^\beta\bigr)\, dt. \tag{2}$$

Каждому корню уравнения (2) отвечает соответствующее решение нелинейного интегрального уравнения, которое находится по формуле (1).

48. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(xt) f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt = A \ln x + B.}$

Решение:

$$y(x) = p \ln x + q, \tag{1}$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + p \int_a^b f(t,\, p \ln t + q)\, dt - A &= 0, \\ q + \int_a^b (p \ln t + q) f(t,\, p \ln t + q)\, dt - B &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

49. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(xt) f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt = Ax^\beta \ln x.}$

Решение:

$$y(x) = px^\beta \ln x + qx^\beta, \tag{1}$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + p \int_a^b t^\beta f(t, pt^\beta \ln t + qt^\beta)\, dt &= A, \\ q + \int_a^b (pt^\beta \ln t + qt^\beta) f(t,\, pt^\beta \ln t + qt^\beta)\, dt &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

50. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(xt) f\big(t, y(t)\big)\, dt = A\cos(\ln x).}$

Решение:
$$y(x) = p\cos(\ln x) + q\sin(\ln x),$$
где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений
$$p + \int_a^b \big[p\cos(\ln t) + q\sin(\ln t)\big] f\big(t,\, p\cos(\ln t) + q\sin(\ln t)\big)\, dt = A,$$
$$q + \int_a^b \big[q\cos(\ln t) - p\sin(\ln t)\big] f\big(t,\, p\cos(\ln t) + q\sin(\ln t)\big)\, dt = 0.$$

51. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(xt) f\big(t, y(t)\big)\, dt = A\sin(\ln x).}$

Решение:
$$y(x) = p\cos(\ln x) + q\sin(\ln x),$$
где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений
$$p + \int_a^b \big[p\cos(\ln t) + q\sin(\ln t)\big] f\big(t,\, p\cos(\ln t) + q\sin(\ln t)\big)\, dt = 0,$$
$$q + \int_a^b \big[q\cos(\ln t) - p\sin(\ln t)\big] f\big(t,\, p\cos(\ln t) + q\sin(\ln t)\big)\, dt = A.$$

52. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(xt) f\big(t, y(t)\big)\, dt = Ax^\beta \cos(\ln x) + Bx^\beta \sin(\ln x).}$

Решение:
$$y(x) = px^\beta \cos(\ln x) + qx^\beta \sin(\ln x), \tag{1}$$
где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений
$$\begin{aligned} p + \int_a^b t^\beta \big[p\cos(\ln t) + q\sin(\ln t)\big] f\big(t,\, pt^\beta\cos(\ln t) + qt^\beta\sin(\ln t)\big)\, dt = A,\\ q + \int_a^b t^\beta \big[q\cos(\ln t) - p\sin(\ln t)\big] f\big(t,\, pt^\beta\cos(\ln t) + qt^\beta\sin(\ln t)\big)\, dt = B. \end{aligned} \tag{2}$$
Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

53. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(xt^\beta) f\big(t, y(t)\big)\, dt = g(x), \qquad \beta > 0.}$

1°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид
$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k x^k,$$
где B_k — корни алгебраических (или трансцендентных) уравнений
$$B_k + B_k F_k(\vec{B}) - A_k = 0, \qquad F_k(\vec{B}) = \int_a^b t^{k\beta} f\bigg(t,\, \sum_{m=1}^{n} B_m t^m\bigg)\, dt.$$
Различным корням соответствуют различные решения интегрального уравнения.

2°. Для правой части уравнения $g(x) = \ln x \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \ln x \sum_{k=0}^{n} B_k x^k + \sum_{k=0}^{n} C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k (\ln x)^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k (\ln x)^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos(\lambda_k \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k \ln x) + \sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k \ln x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin(\lambda_k \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k \ln x) + \sum_{k=1}^{n} C_k \sin(\lambda_k \ln x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

54. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(x-t) f\big(t, y(t)\big)\, dt = 0.}$

1°. Решение:

$$y(x) = ke^{Cx}, \tag{1}$$

где C — произвольная постоянная, а зависимость $k = k(C)$ определяется путем решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$1 + \int_a^b f\big(t, ke^{Ct}\big) e^{-Ct}\, dt = 0. \tag{2}$$

Каждому корню уравнения (2) отвечает соответствующее решение нелинейного интегрального уравнения, которое находится по формуле (1).

2°. Уравнение имеет решения вида $y(x) = \sum\limits_{m=0}^{n} E_m x^m$, где постоянные E_m находятся методом неопределенных коэффициентов.

55. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(x-t) f\big(t, y(t)\big)\, dt = Ax + B.}$

Решение:

$$y(x) = px + q, \tag{1}$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} &p + p\int_a^b f(t, pt+q)\, dt - A = 0,\\ &q + \int_a^b (q - pt) f(t, pt+q)\, dt - B = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

56. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(x-t) f\big(t, y(t)\big)\, dt = Ae^{\lambda x}.}$

Решения:

$$y_n(x) = k_n e^{\lambda x},$$

где k_n — корни алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$k + kF(k) - A = 0, \qquad F(k) = \int_a^b f\big(t, ke^{\lambda t}\big) e^{-\lambda t}\, dt.$$

57. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(x-t) f\big(t, y(t)\big)\, dt = A \operatorname{sh} \lambda x.}$

Решение:

$$y(x) = p \operatorname{sh} \lambda x + q \operatorname{ch} \lambda x, \tag{1}$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + \int_a^b (p \operatorname{ch} \lambda t - q \operatorname{sh} \lambda t) f\big(t,\, p \operatorname{sh} \lambda t + q \operatorname{ch} \lambda t\big)\, dt &= A, \\ q + \int_a^b (q \operatorname{ch} \lambda t - p \operatorname{sh} \lambda t) f\big(t,\, p \operatorname{sh} \lambda t + q \operatorname{ch} \lambda t\big)\, dt &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

58. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(x-t) f\big(t, y(t)\big)\, dt = A \operatorname{ch} \lambda x.}$

Решение:

$$y(x) = p \operatorname{sh} \lambda x + q \operatorname{ch} \lambda x,$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + \int_a^b (p \operatorname{ch} \lambda t - q \operatorname{sh} \lambda t) f\big(t,\, p \operatorname{sh} \lambda t + q \operatorname{ch} \lambda t\big)\, dt &= 0, \\ q + \int_a^b (q \operatorname{ch} \lambda t - p \operatorname{sh} \lambda t) f\big(t,\, p \operatorname{sh} \lambda t + q \operatorname{ch} \lambda t\big)\, dt &= A. \end{aligned}$$

59. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(x-t) f\big(t, y(t)\big)\, dt = A \sin \lambda x.}$

Решение:

$$y(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x, \tag{1}$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + \int_a^b (p \cos \lambda t + q \sin \lambda t) f\big(t,\, p \sin \lambda t + q \cos \lambda t\big)\, dt &= A, \\ q + \int_a^b (q \cos \lambda t - p \sin \lambda t) f\big(t,\, p \sin \lambda t + q \cos \lambda t\big)\, dt &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

60. $\boldsymbol{y(x) + \int_a^b y(x-t) f\big(t, y(t)\big)\, dt = A \cos \lambda x.}$

Решение:

$$y(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x,$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$p+\int_a^b (p\cos\lambda t+q\sin\lambda t)f\bigl(t,\,p\sin\lambda t+q\cos\lambda t\bigr)\,dt=0,$$
$$q+\int_a^b (q\cos\lambda t-p\sin\lambda t)f\bigl(t,\,p\sin\lambda t+q\cos\lambda t\bigr)\,dt=A.$$

61. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^b y(x-t)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt=e^{\mu x}(A\sin\lambda x+B\cos\lambda x).}$

Решение:

$$y(x)=e^{\mu x}(p\sin\lambda x+q\cos\lambda x), \tag{1}$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p+\int_a^b (p\cos\lambda t+q\sin\lambda t)e^{-\mu t}f\bigl(t,\,pe^{\mu t}\sin\lambda t+qe^{\mu t}\cos\lambda t\bigr)\,dt&=A,\\ q+\int_a^b (q\cos\lambda t-p\sin\lambda t)e^{-\mu t}f\bigl(t,\,pe^{\mu t}\sin\lambda t+qe^{\mu t}\cos\lambda t\bigr)\,dt&=B. \end{aligned} \tag{2}$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

62. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^b y(x-t)f\bigl(t,y(t)\bigr)\,dt=g(x).}$

1°. Для правой части $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}B_k\exp(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k определяются путем решения нелинейной системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$B_k+B_kF_k(\vec B)-A_k=0,\qquad k=1,\,\dots,\,n,$$
$$\vec B=\{B_1,\,\dots,\,B_n\},\quad F_k(\vec B)=\int_a^b f\biggl(t,\,\sum_{m=1}^{n}B_m\exp(\lambda_m t)\biggr)\exp(-\lambda_k t)\,dt.$$

Различным корням этой системы соответствуют различные решения интегрального уравнения.

2°. Для полиномиальной правой части уравнения $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}A_kx^k$ решение имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}B_kx^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x)=e^{\lambda x}\sum\limits_{k=0}^{n}A_kx^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n}B_kx^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}B_k\cos(\lambda_k x)+\sum_{k=1}^{n}C_k\sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}B_k\cos(\lambda_k x)+\sum_{k=1}^{n}C_k\sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $g(x)=\cos(\lambda x)\sum\limits_{k=0}^{n}A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\cos(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}B_k x^k+\sin(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

7°. Для правой части $g(x)=\sin(\lambda x)\sum\limits_{k=0}^{n}A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\cos(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}B_k x^k+\sin(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

8°. Для правой части $g(x)=e^{\mu x}\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=e^{\mu x}\sum_{k=1}^{n}B_k\cos(\lambda_k x)+e^{\mu x}\sum_{k=1}^{n}C_k\sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

9°. Для правой части $g(x)=e^{\mu x}\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=e^{\mu x}\sum_{k=1}^{n}B_k\cos(\lambda_k x)+e^{\mu x}\sum_{k=1}^{n}C_k\sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

10°. Для правой части $g(x)=\cos(\lambda x)\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\cos(\lambda x)\sum_{k=1}^{n}B_k\exp(\mu_k x)+\sin(\lambda x)\sum_{k=1}^{n}C_k\exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

11°. Для правой части $g(x)=\sin(\lambda x)\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\cos(\lambda x)\sum_{k=1}^{n}B_k\exp(\mu_k x)+\sin(\lambda x)\sum_{k=1}^{n}C_k\exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

63. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^b y(x+\beta t)f\big(t,y(t)\big)\,dt=Ax+B.}$

Решение:

$$y(x)=px+q, \tag{1}$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} &p+p\int_a^b f(t,pt+q)\,dt-A=0,\\ &q+\int_a^b (\beta pt+q)f(t,pt+q)\,dt-B=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

64. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^b y(x+\beta t)f\big(t,y(t)\big)\,dt=Ae^{\lambda x}.}$

Решения:

$$y_n(x)=k_ne^{\lambda x},$$

где k_n — корни алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$k+kF(k)-A=0,\qquad F(k)=\int_a^b f\big(t,ke^{\lambda t}\big)e^{\beta\lambda t}\,dt.$$

65. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^b y(x+\beta t)f\big(t,y(t)\big)\,dt=A\sin\lambda x+B\cos\lambda x.}$

Решение:

$$y(x)=p\sin\lambda x+q\cos\lambda x, \tag{1}$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} &p+\int_a^b \big[p\cos(\lambda\beta t)-q\sin(\lambda\beta t)\big]f\big(t,\,p\sin\lambda t+q\cos\lambda t\big)\,dt=A,\\ &q+\int_a^b \big[q\cos(\lambda\beta t)+p\sin(\lambda\beta t)\big]f\big(t,\,p\sin\lambda t+q\cos\lambda t\big)\,dt=B. \end{aligned} \tag{2}$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

66. $\boldsymbol{y(x)+\int_a^b y(x+\beta t)f\big(t,y(t)\big)\,dt=g(x).}$

1°. Для правой части $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\exp(\lambda_kx)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}B_k\exp(\lambda_kx),$$

где постоянные B_k определяются путем решения нелинейной системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$B_k+B_kF_k(\vec B)-A_k=0,\qquad k=1,\,\dots,\,n,$$
$$\vec B=\{B_1,\,\dots,\,B_n\},\quad F_k(\vec B)=\int_a^b f\biggl(t,\,\sum_{m=1}^{n}B_m\exp(\lambda_mt)\biggr)\exp(\lambda_k\beta t)\,dt.$$

Различным решениям этой системы соответствуют различные решения интегрального уравнения.

2°. Для полиномиальной правой части уравнения $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}A_kx^k$ решение имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}B_kx^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x)=e^{\lambda x}\sum\limits_{k=0}^{n}A_kx^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n}B_kx^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\cos(\lambda_kx)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}B_k\cos(\lambda_kx)+\sum_{k=1}^{n}C_k\sin(\lambda_kx),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\sin(\lambda_kx)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}B_k\cos(\lambda_kx)+\sum_{k=1}^{n}C_k\sin(\lambda_kx),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $g(x)=\cos(\lambda x)\sum\limits_{k=0}^{n}A_kx^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\cos(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}B_kx^k+\sin(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}C_kx^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

7°. Для правой части $g(x)=\sin(\lambda x)\sum\limits_{k=0}^{n}A_kx^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\cos(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}B_kx^k+\sin(\lambda x)\sum_{k=0}^{n}C_kx^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

8°. Для правой части $g(x)=e^{\mu x}\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\cos(\lambda_kx)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=e^{\mu x}\sum_{k=1}^{n}B_k\cos(\lambda_kx)+e^{\mu x}\sum_{k=1}^{n}C_k\sin(\lambda_kx),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

9°. Для правой части $g(x)=e^{\mu x}\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\sin(\lambda_kx)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=e^{\mu x}\sum_{k=1}^{n}B_k\cos(\lambda_kx)+e^{\mu x}\sum_{k=1}^{n}C_k\sin(\lambda_kx),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

10°. Для правой части $g(x)=\cos(\lambda x)\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\cos(\lambda x)\sum_{k=1}^{n} B_k\exp(\mu_k x)+\sin(\lambda x)\sum_{k=1}^{n} C_k\exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

11°. Для правой части $g(x)=\sin(\lambda x)\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\cos(\lambda x)\sum_{k=1}^{n} B_k\exp(\mu_k x)+\sin(\lambda x)\sum_{k=1}^{n} C_k\exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

67. $y(x)+\int_a^b y(\xi)f\big(t,y(t)\big)\,dt=0,\qquad \xi=x\varphi(t).$

1°. Решение:

$$y(x)=kx^C, \tag{1}$$

где C — произвольная постоянная, а зависимость $k=k(C)$ определяется путем решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$1+\int_a^b\big[\varphi(t)\big]^C f\big(t,kt^C\big)\,dt=0. \tag{2}$$

Каждому корню уравнения (2) отвечает соответствующее решение нелинейного интегрального уравнения, которое находится по формуле (1).

2°. Уравнение имеет решения вида $y(x)=\sum\limits_{m=0}^{n} E_m x^m$, где постоянные E_m находятся методом неопределенных коэффициентов.

68. $y(x)+\int_a^b y(\xi)f\big(t,y(t)\big)\,dt=g(x),\qquad \xi=x\varphi(t).$

1°. Для правой части $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n} B_k x^k,$$

где B_k — корни алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$B_k+B_kF_k(\vec B)-A_k=0,\qquad k=1,\,\dots,\,n,$$

$$\vec B=\{B_1,\,\dots,\,B_n\},\quad F_k(\vec B)=\int_a^b\big[\varphi(t)\big]^k f\left(t,\,\sum_{m=1}^{n} B_m t^m\right)dt.$$

Различным корням соответствуют различные решения интегрального уравнения.

2°. Вид решения для некоторых других функций $g(x)$ указан в пп. 2°–5° интегрального уравнения 6.8.53.

69. $y(x)+\int_a^b y(\xi)f\big(t,y(t)\big)\,dt=0,\qquad \xi=x+\varphi(t).$

1°. Решение:

$$y(x)=ke^{Cx}, \tag{1}$$

где C — произвольная постоянная, а зависимость $k=k(C)$ определяется путем решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$1+\int_a^b e^{C\varphi(t)}f\big(t,ke^{Ct}\big)\,dt=0. \tag{2}$$

Каждому корню уравнения (2) отвечает соответствующее решение нелинейного интегрального уравнения, которое находится по формуле (1).

2°. Уравнение имеет решения вида $y(x)=\sum\limits_{m=0}^{n}E_mx^m$, где постоянные E_m находятся методом неопределенных коэффициентов.

70. $\displaystyle \boldsymbol{y(x)+\int_a^b y(\xi)f\big(t,y(t)\big)\,dt=g(x),\qquad \xi=x+\varphi(t).}$

1°. Для правой части $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\exp(\lambda_kx)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}B_k\exp(\lambda_kx),$$

где постоянные B_k определяются путем решения нелинейной системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$B_k+B_kF_k(\vec{B})-A_k=0,\qquad k=1,\,\dots,\,n,$$
$$\vec{B}=\{B_1,\,\dots,\,B_n\},\quad F_k(\vec{B})=\int_a^b f\biggl(t,\,\sum_{m=1}^{n}B_m\exp(\lambda_mt)\biggr)\exp\bigl[\lambda_k\varphi(t)\bigr]\,dt.$$

2°. Вид решения для некоторых других функций $g(x)$ указан в пп. 2°–11° интегрального уравнения 6.8.66.

Приложение
Некоторые функциональные уравнения

1. Одномерные функциональные уравнения

1.1. Двучленные линейные функциональные уравнения

1. $\boldsymbol{y(x+1) - ay(x) = 0.}$

Линейное однородное уравнение в конечных разностях первого порядка с постоянными коэффициентами.

Решение:

$$y(x) = \Theta(x)a^x,$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом единица*.

При $\Theta(x) \equiv \text{const}$ получим частное решение $y(x) = Ca^x$, где C — произвольная постоянная.

2. $\boldsymbol{y(x+1) - ay(x) = f(x).}$

Линейное неоднородное уравнение в конечных разностях первого порядка с постоянными коэффициентами.

1°. Решение:

$$y(x) = \Theta(x)a^x + \bar{y}(x),$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом единица, а $\bar{y}(x)$ — любое частное решение неоднородного уравнения.

2°. При $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^n$ и $a \neq 1$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k x^n$, где постоянные B_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

3°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \exp(\lambda_k x)$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \exp(\lambda_k x)$, где постоянные B_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

4°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos(\lambda_k x)$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + \sum\limits_{k=1}^{n} D_k \sin(\lambda_k x)$, где постоянные B_k и D_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

5°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin(\lambda_k x)$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + \sum\limits_{k=1}^{n} D_k \sin(\lambda_k x)$, где постоянные B_k и D_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

---

* Здесь и далее в аналогичных случаях $\Theta(x)$ может быть произвольной периодической функцией с периодом $T = \frac{1}{n}$, где n — любое целое положительное число. Минимальному значению $n = 1$ отвечает функция с максимальным периодом $T_{\max} = 1$.

3. $\boldsymbol{y(x+1) - xy(x) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Theta(x)\Gamma(x), \qquad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом единица.

Простейшее частное решение соответствует случаю $\Theta(x) \equiv 1$.

⦿ *Литература*: А. А. Миролюбов, М. А. Солдатов (1981, стр. 46).

4. $\boldsymbol{y(x+1) - a(x-b)(x-c)y(x) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Theta(x)a^x\Gamma(x-b)\Gamma(x-c),$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\Theta(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом единица.

⦿ *Литература*: А. А. Миролюбов, М. А. Солдатов (1981, стр. 52).

5. $\boldsymbol{y(x+1) - R(x)y(x) = 0, \qquad R(x) = a\frac{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n)}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)\ldots(x-\mu_m)}.}$

Решение:

$$y(x) = \Theta(x)a^x\,\frac{\Gamma(x-\lambda_1)\Gamma(x-\lambda_2)\ldots\Gamma(x-\lambda_n)}{\Gamma(x-\mu_1)\Gamma(x-\mu_2)\ldots\Gamma(x-\mu_m)},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\Theta(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом единица.

Простейшее частное решение соответствует случаю $\Theta(x) \equiv 1$.

⦿ *Литература*: А. А. Миролюбов, М. А. Солдатов (1981, стр. 52).

6. $\boldsymbol{y(x+1) - f(x)y(x) = 0.}$

Здесь $f(x) = f(x+1)$ — заданная периодическая функция с периодом единица.

Решение:

$$y(x) = \Theta(x)\bigl[f(x)\bigr]^x,$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+1)$ — произвольная периодическая функция с периодом единица.

При $\Theta(x) \equiv \mathrm{const}$ получим частное решение $y(x) = C\bigl[f(x)\bigr]^x$, где C — произвольная постоянная.

7. $\boldsymbol{y(x+a) - by(x) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Theta(x)b^{x/a},$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+a)$ — произвольная периодическая функция с периодом a.

При $\Theta(x) \equiv \mathrm{const}$ получим частное решение $y(x) = Cb^{x/a}$, где C — произвольная постоянная.

8. $\boldsymbol{y(x+a) - by(x) = f(x).}$

1°. Решение:

$$y(x) = \Theta(x)b^{x/a} + \bar{y}(x),$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+a)$ — произвольная периодическая функция с периодом a, а $\bar{y}(x)$ — любое частное решение неоднородного уравнения.

2°. При $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^n$ и $b \neq 1$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k x^n$, где постоянные B_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

3°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \exp(\lambda_k x)$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \exp(\lambda_k x)$, где постоянные B_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

4°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos(\lambda_k x)$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + \sum\limits_{k=1}^{n} D_k \sin(\lambda_k x)$, где постоянные B_k и D_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

5°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin(\lambda_k x)$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x) + \sum\limits_{k=1}^{n} D_k \sin(\lambda_k x)$, где постоянные B_k и D_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

9. $\boldsymbol{y(x+a) - bxy(x) = 0, \qquad a, b > 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Theta(x) \int_0^\infty t^{(x/a)-1} e^{-t/(ab)}\, dt,$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+a)$ — произвольная периодическая функция с периодом a.

10. $\boldsymbol{y(x+a) - f(x)y(x) = 0.}$

Здесь $f(x) = f(x+a)$ — заданная периодическая функция с периодом a.

Решение:

$$y(x) = \Theta(x)\bigl[f(x)\bigr]^{x/a},$$

где $\Theta(x) = \Theta(x+a)$ — произвольная периодическая функция с периодом a.

При $\Theta(x) \equiv \mathrm{const}$ получим частное решение $y(x) = C\bigl[f(x)\bigr]^{x/a}$, где C — произвольная постоянная.

11. $\boldsymbol{y(ax) - by(x) = 0, \qquad a, b > 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Theta(\ln x)x^\lambda, \qquad \lambda = \frac{\ln b}{\ln a},$$

где $\Theta(z) = \Theta(z + \ln a)$ — произвольная периодическая функция с периодом $\ln a$.

При $\Theta(z) \equiv \mathrm{const}$ получим частное решение $y(x) = Cx^\lambda$, где C — произвольная постоянная.

12. $\boldsymbol{y(ax) - by(x) = f(x).}$

1°. Решение:

$$y(x) = Y(x) + \bar{y}(x),$$

где $Y(x)$ — общее решение однородного уравнения $Y(ax) - bY(x) = 0$ (см. предыдущее уравнение), а $\bar{y}(x)$ — любое частное решение неоднородного уравнения.

2°. При $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^n$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\bar{y}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{a^k-b}x^k, \qquad a^k-b\neq 0.$$

3°. При $f(x)=\ln x\sum\limits_{k=0}^{n} A_k x^k$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\bar{y}(x)=\sum_{k=1}^{n} x^k\bigl(B_k\ln x+C_k\bigr), \qquad B_k=\frac{A_k}{a^k-b}, \quad C_k=-\frac{A_k a^k\ln a}{(a^k-b)^2}.$$

13. $\boldsymbol{y(x)-y(a-x)=0.}$

Решение:

$$y(x)=\Phi(x,a-x),$$

где $\Phi(x,z)=\Phi(z,x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

В качестве функции $\Phi(x,z)$ можно взять функцию $\Phi(x,z)=\varphi(x,z)+\varphi(z,x)$, где $\varphi(x,z)$ — любая функция двух аргументов. Частным случаем этой формулы является $\Phi(x,z)=\varphi(x)+\varphi(z)$, где $\varphi(x)$ — произвольная функция одного аргумента.

14. $\boldsymbol{y(x)+y(a-x)=0.}$

Решение:

$$y(x)=\Phi(x,a-x),$$

где $\Phi(x,z)=-\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

В качестве функции $\Phi(x,z)$ можно взять функцию $\Phi(x,z)=\varphi(x,z)-\varphi(z,x)$, где $\varphi(x,z)$ — любая функция двух аргументов. Частным случаем этой формулы является $\Phi(x,z)=\varphi(x)-\varphi(z)$, где $\varphi(x)$ — произвольная функция одного аргумента.

15. $\boldsymbol{y(x)+y(a-x)=b.}$

Решение:

$$y(x)=\tfrac{1}{2}b+\Phi(x,a-x),$$

где $\Phi(x,z)=-\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

Частные решения: $y(x)=b\sin^2\Bigl(\dfrac{\pi x}{2a}\Bigr)$ и $y(x)=b\cos^2\Bigl(\dfrac{\pi x}{2a}\Bigr)$.

16. $\boldsymbol{y(x)+y(a-x)=f(x).}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x)=f(a-x)$.

Решение:

$$y(x)=\tfrac{1}{2}f(x)+\Phi(x,a-x),$$

где $\Phi(x,z)=-\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

17. $\boldsymbol{y(x)-y(a-x)=f(x).}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x)=-f(a-x)$.

Решение:

$$y(x)=\tfrac{1}{2}f(x)+\Phi(x,a-x),$$

где $\Phi(x,z)=\Phi(z,x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

18. $\boldsymbol{y(x)+g(x)y(a-x)=f(x).}$

Решение:

$$y(x)=\frac{f(x)-g(x)f(a-x)}{1-g(x)g(a-x)}.$$

19. $\boldsymbol{y(x^a) - by(x) = 0, \qquad a, b > 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Theta\bigl(\ln|\ln x|\bigr)|\ln x|^p, \qquad p = \frac{\ln b}{\ln a},$$

где $\Theta(z) = \Theta(z + \ln a)$ — произвольная периодическая функция с периодом $|\ln a|$.

При $\Theta(z) \equiv \text{const}$ получим частное решение $y(x) = C|\ln x|^p$, где C — произвольная постоянная.

20. $\boldsymbol{y(x) - y(a/x) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Phi(x, a/x),$$

где $\Phi(x, z) = \Phi(z, x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

21. $\boldsymbol{y(x) + y(a/x) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Phi(x, a/x),$$

где $\Phi(x, z) = -\Phi(z, x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

22. $\boldsymbol{y(x) + y(a/x) = b.}$

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}b + \Phi(x, a/x),$$

где $\Phi(x, z) = -\Phi(z, x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

23. $\boldsymbol{y(x) + y(a/x) = f(x).}$

Правая часть уравнения должна удовлетворять условию $f(x) = f(a/x)$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \Phi(x, a/x),$$

где $\Phi(x, z) = -\Phi(z, x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

24. $\boldsymbol{y(x) - y(a/x) = f(x).}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = -f(a/x)$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \Phi(x, a/x),$$

где $\Phi(x, z) = \Phi(z, x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

25. $\boldsymbol{y(x) + g(x)y(a/x) = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x) - g(x)f(a/x)}{1 - g(x)g(a/x)}.$$

26. $\boldsymbol{y(x) - y\Bigl(\dfrac{a - x}{1 + bx}\Bigr) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Phi\Bigl(x, \frac{a - x}{1 + bx}\Bigr),$$

где $\Phi(x, z) = \Phi(z, x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

27. $\boldsymbol{y(x) + y\Bigl(\dfrac{a - x}{1 + bx}\Bigr) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \Phi\Bigl(x, \frac{a - x}{1 + bx}\Bigr),$$

где $\Phi(x, z) = -\Phi(z, x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

28. $\boldsymbol{y(x) + y\Big(\dfrac{a-x}{1+bx}\Big) = f(x).}$

Функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = f\Big(\dfrac{a-x}{1+bx}\Big)$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2} f(x) + \Phi\Big(x,\ \frac{a-x}{1+bx}\Big),$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

29. $\boldsymbol{y(x) - y\Big(\dfrac{a-x}{1+bx}\Big) = f(x).}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = -f\Big(\dfrac{a-x}{1+bx}\Big)$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2} f(x) + \Phi\Big(x,\ \frac{a-x}{1+bx}\Big),$$

где $\Phi(x,z) = \Phi(z,x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

30. $\boldsymbol{y(x) - cy\Big(\dfrac{a-x}{1+bx}\Big) = f(x), \qquad c \neq \pm 1.}$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{1-c^2} f(x) + \frac{c}{1-c^2} f\Big(\frac{a-x}{1+bx}\Big).$$

31. $\boldsymbol{y(x) + g(x)y\Big(\dfrac{a-x}{1+bx}\Big) = f(x).}$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x) - g(x)f(z)}{1 - g(x)g(z)}, \qquad z = \frac{a-x}{1+bx}.$$

32. $\boldsymbol{y(x) + cy\Big(\dfrac{ax-\beta}{x+b}\Big) = f(x), \qquad \beta = a^2 + ab + b^2.}$

Частный случай уравнения 11 из приложения 1.2.

33. $\boldsymbol{y(x) + cy\Big(\dfrac{bx+\beta}{a-x}\Big) = f(x), \qquad \beta = a^2 + ab + b^2.}$

Частный случай уравнения 11 из приложения 1.2.

34. $\boldsymbol{y(x) + g(x)y\Big(\dfrac{ax-\beta}{x+b}\Big) = f(x), \qquad \beta = a^2 + ab + b^2.}$

Частный случай уравнения 12 из приложения 1.2.

35. $\boldsymbol{y(x) + g(x)y\Big(\dfrac{bx+\beta}{a-x}\Big) = f(x), \qquad \beta = a^2 + ab + b^2.}$

Частный случай уравнения 12 из приложения 1.2.

36. $\boldsymbol{y(x) - y\big(\sqrt{a^2 - x^2}\,\big) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant a.}$

Решение:

$$y(x) = \Phi\big(x,\ \sqrt{a^2 - x^2}\,\big),$$

где $\Phi(x,z) = \Phi(z,x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

37. $\boldsymbol{y(x) + y\big(\sqrt{a^2 - x^2}\,\big) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant a.}$

Решение:

$$y(x) = \Phi\big(x,\, \sqrt{a^2 - x^2}\,\big),$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

38. $\boldsymbol{y(x) + y\big(\sqrt{a^2 - x^2}\,\big) = b, \qquad 0 \leqslant x \leqslant a.}$

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}b + \Phi\big(x,\, \sqrt{a^2 - x^2}\,\big),$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

39. $\boldsymbol{y(x) + y\big(\sqrt{a^2 - x^2}\,\big) = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant a.}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = f\big(\sqrt{a^2 - x^2}\,\big)$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \Phi\big(x,\, \sqrt{a^2 - x^2}\,\big),$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

40. $\boldsymbol{y(x) - y\big(\sqrt{a^2 - x^2}\,\big) = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant a.}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = -f\big(\sqrt{a^2 - x^2}\,\big)$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \Phi\big(x,\, \sqrt{a^2 - x^2}\,\big),$$

где $\Phi(x,z) = \Phi(z,x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

41. $\boldsymbol{y(x) + g(x)y\big(\sqrt{a^2 - x^2}\,\big) = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant a.}$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x) - g(x)f\big(\sqrt{a^2 - x^2}\,\big)}{1 - g(x)g\big(\sqrt{a^2 - x^2}\,\big)}.$$

42. $\boldsymbol{y(\sin x) - y(\cos x) = 0.}$

Решение в неявном виде:

$$y(\sin x) = \Phi(\sin x,\, \cos x),$$

где $\Phi(x,z) = \Phi(z,x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

43. $\boldsymbol{y(\sin x) + y(\cos x) = 0.}$

Решение в неявном виде:

$$y(\sin x) = \Phi(\sin x,\, \cos x),$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

44. $\boldsymbol{y(\sin x) + y(\cos x) = a.}$

Решение в неявном виде:

$$y(\sin x) = \tfrac{1}{2}a + \Phi(\sin x,\, \cos x),$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

45. $\boldsymbol{y(\sin x) + y(\cos x) = f(x).}$

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = f\big(\frac{\pi}{2} - x\big)$.

Решение в неявном виде:

$$y(\sin x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \Phi(\sin x,\, \cos x),$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

46. $\boldsymbol{y(\sin x) - y(\cos x) = f(x)}$.

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = -f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Решение в неявном виде:

$$y(\sin x) = \tfrac{1}{2} f(x) + \Phi(\sin x, \cos x),$$

где $\Phi(x, z) = \Phi(z, x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

47. $\boldsymbol{y(\sin x) + g(x) y(\cos x) = f(x)}$.

Решение в параметрическом виде:

$$x = \sin t, \qquad y = \frac{f(t) - g(t) f\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{1 - g(t) g\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}.$$

48. $\boldsymbol{y(x) - y\big(\omega(x)\big) = 0}$, **где** $\boldsymbol{\omega\big(\omega(x)\big) = x}$.

Решение:

$$y(x) = \Phi\big(x, \omega(x)\big),$$

где $\Phi(x, z) = \Phi(z, x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

49. $\boldsymbol{y(x) + y\big(\omega(x)\big) = 0}$, **где** $\boldsymbol{\omega\big(\omega(x)\big) = x}$.

Решение:

$$y(x) = \Phi\big(x, \omega(x)\big),$$

где $\Phi(x, z) = -\Phi(z, x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

50. $\boldsymbol{y(x) + y\big(\omega(x)\big) = b}$, **где** $\boldsymbol{\omega\big(\omega(x)\big) = x}$.

Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2} b + \Phi\big(x, \omega(x)\big),$$

где $\Phi(x, z) = -\Phi(z, x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

51. $\boldsymbol{y(x) + y\big(\omega(x)\big) = f(x)}$, **где** $\boldsymbol{\omega\big(\omega(x)\big) = x}$.

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = f\big(\omega(x)\big)$. Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2} f(x) + \Phi\big(x, \omega(x)\big),$$

где $\Phi(x, z) = -\Phi(z, x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

52. $\boldsymbol{y(x) - y\big(\omega(x)\big) = f(x)}$, **где** $\boldsymbol{\omega\big(\omega(x)\big) = x}$.

Здесь функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(x) = -f\big(\omega(x)\big)$. Решение:

$$y(x) = \tfrac{1}{2} f(x) + \Phi\big(x, \omega(x)\big),$$

где $\Phi(x, z) = \Phi(z, x)$ — любая симметричная функция двух аргументов.

53. $\boldsymbol{y(x) + g(x) y\big(\omega(x)\big) = f(x)}$, **где** $\boldsymbol{\omega\big(\omega(x)\big) = x}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x) - g(x) f\big(\omega(x)\big)}{1 - g(x) g\big(\omega(x)\big)}.$$

1.2. Другие линейные функциональные уравнения

1. $y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0.$

Линейное однородное разностное уравнение второго порядка, определенное на дискретном множестве точек $x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Здесь использованы обозначения $y_n = y(n)$.

Пусть λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{1}$$

Общее решение разностного уравнения при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ имеет вид

$$y_n = y_1 \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - y_0 b \frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \tag{2}$$

где y_1 и y_0 — произвольные постоянные (равные значениям искомой функции в двух первых точках).

В случае комплексно сопряженных корней в решении (2) следует отделить действительную и мнимую части.

Общее решение разностного уравнения при $\lambda_1 = \lambda_2$ имеет вид

$$y_n = y_1 n \lambda_1^{n-1} - y_0 b(n-1)\lambda_1^{n-2}.$$

⦿ *Литература*: Г. Дёч (1971, стр. 215).

2. $y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = f_n.$

Линейное неоднородное разностное уравнение второго порядка, определенное на дискретном множестве точек $x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Здесь использованы обозначения $y_n = y(n)$, $f_n = f(n)$.

Пусть λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{1}$$

1°. Общее решение разностного уравнения при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ имеет вид

$$y_n = y_1 \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - y_0 b \frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \sum_{k=2}^{n} f_{n-k} \frac{\lambda_1^{k-1} - \lambda_2^{k-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \tag{2}$$

где y_1 и y_0 — произвольные постоянные (равные значениям искомой функции в двух первых точках).

В случае комплексно сопряженных корней в решении (2) следует отделить действительную и мнимую части.

Общее решение разностного уравнения при $\lambda_1 = \lambda_2$ имеет вид

$$y_n = y_1 n \lambda_1^{n-1} - y_0 b(n-1)\lambda_1^{n-2} + \sum_{k=2}^{n} f_{n-k}(k-1)\lambda_1^{k-2}.$$

2°. В краевых задачах часто рассматривается конечное множество точек $x=0, 1, \ldots, N$; при этом задаются начальное и конечное значения искомой функции y_0 и y_N. Требуется найти значения $y_n \equiv y(x)|_{x=n}$ при $1 \leqslant n \leqslant N-1$.

При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ решение имеет вид

$$y_n = y_0 \frac{\lambda_1^N \lambda_2^n - \lambda_1^n \lambda_2^N}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} + y_N \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} +$$
$$+ \sum_{k=2}^{n} f_{n-k} \frac{\lambda_1^{k-1} - \lambda_2^{k-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} \sum_{k=2}^{N} f_{N-k} \frac{\lambda_1^{k-1} - \lambda_2^{k-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

При $n = 1$ первая сумма равна нулю.

⦿ *Литература*: Г. Дёч (1971, стр. 215, 218).

3. $\boldsymbol{y(x+2)+ay(x+1)+by(x)=0.}$

Линейное однородное уравнение в конечных разностях второго порядка с постоянными коэффициентами.

Запишем характеристическое уравнение

$$\lambda^2+a\lambda+b=0. \tag{1}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1°. Корни λ_1 и λ_2 квадратного уравнения (1) действительны и различны. Тогда общее решение исходного уравнения в конечных разностях имеет вид

$$y(x)=\Theta_1(x)\lambda_1^x+\Theta_2(x)\lambda_2^x, \tag{2}$$

где $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ — произвольные периодические функции с периодом единица, т. е. $\Theta_k(x)=\Theta_k(x+1)$, $k=1,\ 2$.

При $\Theta_k\equiv\text{const}$ из (2) имеем частные решения

$$y(x)=C_1\lambda_1^x+C_2\lambda_2^x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. Квадратное уравнение (1) имеет одинаковые корни: $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$. В этом случае общее решение функционального уравнения определяется формулой

$$y=\bigl[\Theta_1(x)+x\Theta_2(x)\bigr]\lambda^x.$$

3°. В случае комплексно сопряженных корней $\lambda=\rho(\cos\beta\pm i\sin\beta)$ общее решение функционального уравнения имеет вид

$$y=\Theta_1(x)\rho^x\cos(\beta x)+\Theta_2(x)\rho^x\sin(\beta x),$$

где $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ — произвольные периодические функции с периодом единица.

⦿ *Литература*: Математическая энциклопедия, т. 2 (1979, стр. 1030).

4. $\boldsymbol{y(x+2)+ay(x+1)+by(x)=f(x).}$

Линейное неоднородное уравнение в конечных разностях второго порядка с постоянными коэффициентами.

1°. Решение:

$$y(x)=Y(x)+\bar{y}(x),$$

где $Y(x)$ общее решение соответствующего однородного уравнения $Y(x+2)+{}$ $+aY(x+1)+bY(x)=0$ (см. предыдущее уравнение), а $\bar{y}(x)$ — любое частное решение неоднородного уравнения.

2°. При $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}A_kx^n$ и $a+b+1\neq 1$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}B_kx^n$, где постоянные B_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

3°. При $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\exp(\lambda_kx)$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}B_k\exp(\lambda_kx)$, где постоянные B_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

4°. При $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\cos(\lambda_kx)$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}B_k\cos(\lambda_kx)+\sum\limits_{k=1}^{n}D_k\sin(\lambda_kx)$, где постоянные B_k и D_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

5°. При $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\sin(\lambda_k x)$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} B_k\cos(\lambda_k x)+\sum\limits_{k=1}^{n} D_k\sin(\lambda_k x)$, где постоянные B_k и D_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

5. $\boldsymbol{y(x+2)+a(x+1)y(x+1)+bx(x+1)y(x)=0.}$

Это функциональное уравнение имеет частные решения вида

$$y(x;\lambda)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t/\lambda}\,dt, \tag{1}$$

где λ — является корнем квадратного уравнения

$$\lambda^2+a\lambda+b=0. \tag{2}$$

Для сходимости интеграла в правой части (1) должны выбираться корни квадратного уравнения (2), удовлетворяющие условию $\operatorname{Re}\lambda>0$. Если оба корня λ_1 и λ_2 удовлетворяют этому условию, то общее решение исходного функционального уравнения имеет вид

$$y(x)=\Theta_1(x)y(x,\lambda_1)+\Theta_2(x)y(x,\lambda_2),$$

где $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ — произвольные периодические функции с периодом единица.

6. $\boldsymbol{Ay(ax)+By(bx)+y(x)=0.}$

Это функциональное уравнение имеет частные решения вида $y(x)=Cx^\beta$, где C — произвольная постоянная, а β является корнем трансцендентного уравнения $Aa^\beta+Bb^\beta+1=0$.

7. $\boldsymbol{Ay(x^a)+By(x^b)+y(x)=0.}$

Это функциональное уравнение имеет частные решения вида $y(x)=C|\ln x|^p$, где C — произвольная постоянная, а p является корнем трансцендентного уравнения $A|a|^p+B|b|^p+1=0$.

8. $\boldsymbol{y\big(y(x)\big)-x=0.}$

1°. Частные решения:

$$y_1(x)=x,\qquad y_2(x)=C-x,\qquad y_3(x)=\frac{C}{x},\qquad y_4(x)=\frac{C_1-x}{1+C_2x},$$

где C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Частные решения этого функционального уравнения можно задавать в неявной форме с помощью алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\Phi(x,y)=0,$$

где $\Phi(x,y)=\Phi(y,x)$ — некоторая симметричная функция двух аргументов.

3°. Общее решение в параметрическом виде:

$$x=\Theta_1(t)+\Theta_2(t)\sin(\pi t),$$
$$y=\Theta_1(t)-\Theta_2(t)\sin(\pi t),$$

где $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ — произвольные периодические функции с периодом единица, т. е. $\Theta_k(x)=\Theta_k(x+1)$, $k=1,\ 2$.

9. $y\big(y(x)\big) + ay(x) + bx = 0.$

Общее решение в параметрическом виде:

$$x = C_1(t)\lambda_1^t + C_2(t)\lambda_2^t,$$
$$y = C_1(t)\lambda_1^{t+1} + C_2(t)\lambda_2^{t+1},$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

а $C_1 = C_1(t)$ и $C_2 = C_2(t)$ — произвольные периодические функции с периодом равным единице, $C_n(t) = C_n(t+1)$.

При $C_1 = \text{const}$ и $C_2 = \text{const}$ имеем частное решение в неявном виде

$$\frac{\lambda_2 x - y(x)}{\lambda_2 - \lambda_1} = C_1 \left[\frac{\lambda_1 x - y(x)}{C_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \right]^k, \qquad k = \frac{\ln \lambda_1}{\ln \lambda_2},$$

где C — произвольная постоянная.

⦿ *Литература*: Математическая энциклопедия, т. 5 (1985, стр. 703).

10. $y\big(y(y(x))\big) - x = 0.$

Частный случай уравнения 20 из этого раздела.

Частные решения:

$$y_1(x) = -\frac{C^2}{C+x}, \qquad y_2(x) = C - \frac{C^2}{x}, \qquad y_3(x) = C_1 - \frac{(C_1+C_2)^2}{C_2+x},$$

где C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

11. $Ay(x) + By\Big(\dfrac{ax-\beta}{x+b}\Big) + Cy\Big(\dfrac{bx+\beta}{a-x}\Big) = f(x), \qquad \beta = a^2 + ab + b^2.$

Заменим последовательно в уравнении x сначала на $\dfrac{ax-\beta}{x+b}$, а затем — на $\dfrac{bx+\beta}{a-x}$. В результате получим (первым записано исходное уравнение)

$$\begin{aligned} &Ay(x) + By(u) + Cy(w) = f(x),\\ &Ay(u) + By(w) + Cy(x) = f(u),\\ &Ay(w) + By(x) + Cy(u) = f(w), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $u = \dfrac{ax-\beta}{x+b}$ и $w = \dfrac{bx+\beta}{a-x}$.

Исключая из системы линейных алгебраических уравнений (1) величины $y(u)$ и $y(w)$, получим решение исходного функционального уравнения.

12. $f_1(x)y(x) + f_2(x)y\Big(\dfrac{ax-\beta}{x+b}\Big) + f_3(x)y\Big(\dfrac{bx+\beta}{a-x}\Big) = g(x), \quad \beta = a^2 + ab + b^2.$

Заменим последовательно в уравнении x сначала на $\dfrac{ax-\beta}{x+b}$, а затем — на $\dfrac{bx+\beta}{a-x}$. В результате получим систему (первым записано исходное уравнение)

$$\begin{aligned} &f_1(x)y(x) + f_2(x)y(u) + f_3(x)y(w) = g(x),\\ &f_1(u)y(u) + f_2(u)y(w) + f_3(u)y(x) = g(u),\\ &f_1(w)y(w) + f_2(w)y(x) + f_3(w)y(u) = g(w), \end{aligned} \qquad (1)$$

где приняты обозначения

$$u = \frac{ax-\beta}{x+b}, \quad w = \frac{bx+\beta}{a-x}.$$

Исключая из системы линейных алгебраических уравнений (1) величины $y(u)$ и $y(w)$, получим решение $y = y(x)$ исходного функционального уравнения.

13. $\boldsymbol{y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0.}$

Линейное однородное разностное уравнение m-го порядка, определенное на дискретном множестве точек $x = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь использованы обозначения $y_n = y(n)$.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — корни характеристического уравнения

$$P(\lambda) \equiv \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{1}$$

Если корни характеристического уравнения (1) различны, то общее решение разностного уравнения имеет вид

$$y_n = \sum_{i=0}^{m-1} y_i \sum_{j=0}^{m-i-1} a_{i+j+1} \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k^{n+1}}{P'(\lambda_k)}, \tag{2}$$

где штрихом обозначена производная.

В формулу (2) входят начальные значения $y_0, y_1, \ldots, y_m$, которые могут быть заданы произвольно.

В случае комплексно сопряженных корней в решении (2) следует отделить действительную и мнимую части.

◉ *Литература*: Г. Дёч (1971, стр. 213).

14. $\boldsymbol{y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = f_n.}$

Линейное неоднородное разностное уравнение m-го порядка, определенное на дискретном множестве точек $x = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь использованы обозначения $y_n = y(n)$, $f_n = f(n)$.

Общее решение разностного уравнения имеет вид $y(x) = Y(x) + \bar{y}(x)$, где $Y(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения (при $f_n \equiv 0$), а $\bar{y}(x)$ — любое частное решение неоднородного уравнения.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — корни характеристического уравнения

$$P(\lambda) \equiv \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{1}$$

Если корни характеристического уравнения (1) различны, то общее решение разностного уравнения имеет вид

$$y_n = \sum_{i=0}^{m-1} y_i \sum_{j=0}^{m-i-1} a_{i+j+1} \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k^{n+1}}{P'(\lambda_k)} + \sum_{\nu=m}^{n} f_{n-\nu} \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k^{\nu-1}}{P'(\lambda_k)}, \tag{2}$$

где штрихом обозначена производная.

В формулу (2) входят начальные значения $y_0, y_1, \ldots, y_m$, которые могут быть заданы произвольно.

В случае комплексно сопряженных корней в решении (2) следует отделить действительную и мнимую части.

◉ *Литература*: Г. Дёч (1971, стр. 213).

15. $\boldsymbol{y(x+n) + a_{n-1}y(x+n-1) + \ldots + a_1 y(x+1) + a_0 y(x) = 0.}$

Линейное однородное уравнение в конечных разностях n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Запишем характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1°. Все корни λ_1, λ_2, ..., λ_n уравнения (1) действительны и различны. Тогда общее решение исходного уравнения в конечных разностях имеет вид

$$y(x) = \Theta_1(x)\lambda_1^x + \Theta_2(x)\lambda_2^x + \ldots + \Theta_n(x)\lambda_n^x, \tag{1}$$

где $\Theta_1(x)$, $\Theta_2(x)$, ..., $\Theta_n(x)$ — произвольные периодические функции с периодом единица, т. е. $\Theta_k(x) = \Theta_k(x+1)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

При $\Theta_k(x) \equiv \mathrm{C}_k$ из (2) имеем частное решение

$$y(x) = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x + \ldots + C_n\lambda_n^x,$$

где C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные.

2°. Имеется m равных действительных корней: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m$ $(m \leqslant n)$, другие корни действительны и различны. В этом случае решение функционального уравнения определяется формулой

$$y = \left[\Theta_1(x) + x\Theta_2(x) + \cdots + x^{m-1}\Theta_m(x)\right]\lambda_1^x + \\ + \Theta_{m+1}(x)\lambda_{m+1}^x + \Theta_{m+2}(x)\lambda_{m+2}^x + \cdots + \Theta_n(x)\lambda_n^x.$$

3°. Имеется m равных комплексно сопряженных корней: $\lambda = \rho(\cos\beta \pm i\sin\beta)$ $(2m \leqslant n)$, другие корни действительны и различны. В этом случае при $\Theta_n(x) \equiv \mathrm{const}_k$ решение функционального уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} y = {}&\rho^x\cos(\beta x)(A_1 + A_2x + \cdots + A_mx^{m-1}) + \\ &+ \rho^x\sin(\beta x)(B_1 + B_2x + \cdots + B_mx^{m-1}) + \\ &+ C_{m+1}\lambda_{m+1}^x + C_{m+2}\lambda_{m+2}^x + \cdots + C_n\lambda_n^x, \end{aligned}$$

где A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_m, C_{2m+1}, ..., C_n — произвольные постоянные.

◉ *Литература*: Математическая энциклопедия, т. 2 (1979, стр. 1030).

16. $y(x+n) + a_{n-1}y(x+n-1) + \ldots + a_1y(x+1) + a_0y(x) = f(x)$.

Линейное неоднородное уравнение в конечных разностях n-го порядка с постоянными коэффициентами.

1°. Решение:

$$y(x) = Y(x) + \bar{y}(x),$$

где $Y(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$Y(x+n) + a_{n-1}Y(x+n-1) + \ldots + a_1Y(x+1) + a_0Y(x) = 0$$

(см. предыдущее уравнение), а $\bar{y}(x)$ — любое частное решение неоднородного уравнения.

2°. При $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_kx^n$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_kx^n$, где постоянные B_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

3°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k\exp(\lambda_kx)$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k\exp(\lambda_kx)$, где постоянные B_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

4°. При $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k\cos(\lambda_kx)$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k\cos(\lambda_kx) + \sum\limits_{k=1}^{n} D_k\sin(\lambda_kx)$, где постоянные B_k и D_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

5°. При $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin(\lambda_k x)$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} B_k \cos(\lambda_k x)+\sum\limits_{k=1}^{n} D_k \sin(\lambda_k x)$, где постоянные B_k и D_k находятся методом неопределенных коэффициентов.

17. $\boldsymbol{y(x+b_n)+a_{n-1}y(x+b_{n-1})+\ldots+a_1 y(x+b_1)+a_0 y(x)=0.}$

Частные решения имеют вид $y(x)=\lambda_k^x$, где λ_k — корни трансцендентного (или алгебраического) уравнения

$$\lambda^{b_n}+a_{n-1}\lambda^{b_{n-1}}+\ldots+a_1\lambda^{b_1}+a_0=0.$$

18. $\boldsymbol{y(x^{a_n})+b_{n-1}y(x^{a_{n-1}})+\ldots+b_1 y(x^{a_1})+b_0 y(x)=0.}$

Это функциональное уравнение имеет частные решения вида $y(x)=\mathrm{C}|\ln x|^p$, где C — произвольная постоянная, а p является корнем трансцендентного уравнения $|a_n|^p+b_{n-1}|a_{n-1}|^p+\ldots+b_1|a_1|^p+b_0=0$.

19. $\boldsymbol{y(a_n x)+b_{n-1}y(a_{n-1}x)+\ldots+b_1 y(a_1 x)+b_0 y(x)=0.}$

Это функциональное уравнение имеет частные решения вида $y=Cx^{\beta}$, где C — произвольная постоянная, а β является корнем трансцендентного уравнения

$$a_n^{\beta}+b_{n-1}a_{n-1}^{\beta}+\ldots+b_1 a_1^{\beta}+b_0=0.$$

20. $\boldsymbol{y^{[n]}(x)+a_{n-1}y^{[n-1]}(x)+\ldots+a_1 y(x)+a_0 x=0.}$

Здесь использованы обозначения $y^{[2]}(x)=y\big(y(x)\big),\ \ldots,\ y^{[n]}(x)=y\big(y^{[n-1]}(x)\big)$. Решение ищем в параметрическом виде:

$$x=w(t),\quad y=w(t+1).$$

При этом исходное уравнение приводится к следующему линейному уравнению в конечных разностях n-го порядка (см. уравнение 15 в этом разделе):

$$w(t+n)+a_{n-1}w(t+n-1)+\ldots+a_1 w(t+1)+a_0 w(t)=0.$$

21. $\boldsymbol{(a_k x+b_k)y(x+h_k)+(a_{k-1}x+b_{k-1})y(x+h_{k-1})+\ldots+}$
$\boldsymbol{+(a_0 x+b_0)y(x+h_0)=f(x).}$

Об этом уравнении см. в книгах А. А. Миролюбова, М. А. Солдатова (1981, 1986).

1.3. Функциональные уравнения с квадратичной нелинейностью

1. $\boldsymbol{y(x+1)-ay^2(x)=f(x).}$

Частный случай уравнения 1 из приложения 1.5.

2. $\boldsymbol{y(2x)-ay^2(x)=0.}$

Частный случай уравнения 3 из приложения 1.5.
Частное решение:

$$y(x)=\frac{1}{a}e^{Cx},$$

где C — произвольная постоянная.

3. $\boldsymbol{y(2x) - 2y^2(x) + a = 0.}$

Частный случай уравнения 3 из приложения 1.5.

Частные решения при $a = 1$:

$$y(x) = \cos(Cx),$$
$$y(x) = \operatorname{ch}(Cx),$$

где C — произвольная постоянная.

4. $\boldsymbol{y(x)y(a - x) = b^2.}$

Решение:

$$y(x) = \pm b \exp\bigl[\Phi(x, a - x)\bigr],$$

где $\Phi(x, z) = -\Phi(z, x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

При $\Phi(x, z) = C(x - z)$ имеем частные решения вида

$$y(x) = \pm b e^{C(2x-a)},$$

где C — произвольная постоянная.

5. $\boldsymbol{y(x)y(a - x) = f^2(x).}$

Правая часть уравнения должна удовлетворять следующему условию: $f(x)=\pm f(a-$
Для определенности будем считать, что $f(x) = f(a - x)$.

Решение:

$$y(x) = \pm f(x) \exp\bigl[\Phi(x, a - x)\bigr],$$

где $\Phi(x, z) = -\Phi(z, x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

При $\Phi(x, z) = C(x - z)$ имеем частные решения вида

$$y(x) = \pm e^{C(2x-a)} f(x),$$

где C — произвольная постоянная.

6. $\boldsymbol{y^2(x) + y^2(a - x) = b^2.}$

Частные решения:

$$y_{1,2}(x) = \pm b \sin\Bigl(\frac{\pi x}{2a}\Bigr), \qquad y_{3,4}(x) = \pm b \cos\Bigl(\frac{\pi x}{2a}\Bigr).$$

7. $\boldsymbol{y^2(x) + Ay(x)y(a - x) + By^2(a - x) + Cy(x) + Dy(a - x) = f(x).}$

Частный случай уравнения 2 из приложения 1.5.

Решение в параметрическом виде:

$$y^2 + Ayw + Bw^2 + Cy + Dw = f(x),$$
$$w^2 + Ayw + By^2 + Cw + Dy = f(a - x).$$

Исключая отсюда w, можно получить решение в неявном виде.

8. $\boldsymbol{y(x)y(ax) = f(x).}$

Частный случай уравнения 3 из приложения 1.5.

9. $\boldsymbol{y(x^2) - ay^2(x) = 0.}$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{a} x^C,$$

где C — произвольная постоянная. Кроме того, непрерывным решением является функция $y(x) \equiv 0$.

10. $\boldsymbol{y(x)y(x^a) = f(x), \qquad a > 0.}$

Частный случай уравнения 8 из приложения 1.5.

11. $\boldsymbol{y(x)y(a/x) = b^2.}$

Решение:

$$y(x) = \pm b \exp\bigl[\Phi(x, a/x)\bigr],$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

При $\Phi(x,z) = C(\ln x - \ln z)$ имеем частные решения вида

$$y = \pm b a^{-C} x^{2C},$$

где C — произвольная постоянная.

12. $\boldsymbol{y(x)y(a/x) = f^2(x).}$

Правая часть уравнения должна удовлетворять следующему условию: $f(x) = \pm f(a/x)$. Для определенности будем считать, что $f(x) = f(a/x)$.

Решение:

$$y(x) = \pm f(x) \exp\bigl[\Phi(x, a/x)\bigr],$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

При $\Phi(x,z) = C(\ln x - \ln z)$ имеем частные решения вида

$$y = \pm a^{-C} x^{2C} f(x),$$

где C — произвольная постоянная.

13. $\boldsymbol{y^2(x) + Ay(x)y(a/x) + By^2(a/x) + Cy(x) + Dy(a/x) = f(x).}$

Частный случай уравнения 4 из приложения 1.5.

Решение в параметрическом виде:

$$\begin{gathered} y^2 + Ayw + Bw^2 + Cy + Dw = f(x), \\ w^2 + Ayw + By^2 + Cw + Dy = f(a/x). \end{gathered}$$

Исключая отсюда w, можно получить решение в неявном виде.

14. $\boldsymbol{y(x)y\Bigl(\dfrac{a-x}{1+bx}\Bigr) = A^2.}$

Решение:

$$y(x) = \pm A \exp\left[\Phi\Bigl(x, \frac{a-x}{1+bx}\Bigr)\right],$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

15. $\boldsymbol{y(x)y\Bigl(\dfrac{a-x}{1+bx}\Bigr) = f^2(x).}$

Правая часть уравнения должна удовлетворять следующему условию: $f(x) = \pm f\Bigl(\dfrac{a-x}{1+bx}\Bigr)$. Для определенности будем считать, что $f(x) = f\Bigl(\dfrac{a-x}{1+bx}\Bigr)$.

Решение:

$$y(x) = \pm f(x) \exp\left[\Phi\Bigl(x, \frac{a-x}{1+bx}\Bigr)\right],$$

где $\Phi(x,z) = -\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

16. $\boldsymbol{y^2(x) + Ay(x)y\Bigl(\dfrac{a-x}{1+bx}\Bigr) + By(x) = f(x).}$

Частный случай уравнения 5 из приложения 1.5.

17. $\boldsymbol{y(x)y\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)=b^2,\qquad 0\leqslant x\leqslant a.}$

Решение:

$$y(x)=\pm b\exp\bigl[\Phi\bigl(x,\,\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)\bigr],$$

где $\Phi(x,z)=-\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

18. $\boldsymbol{y(x)y\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)=f^2(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant a.}$

Правая часть уравнения должна удовлетворять следующему условию: $f(x)=\pm f\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)$. Для определенности будем считать, что $f(x)=f\bigl(\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)$.

Решение:

$$y(x)=\pm f(x)\exp\bigl[\Phi\bigl(x,\,\sqrt{a^2-x^2}\,\bigr)\bigr],$$

где $\Phi(x,z)=-\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

19. $\boldsymbol{y(\sin x)y(\cos x)=a^2.}$

Решение в неявном виде:

$$y(\sin x)=\pm a\exp\bigl[\Phi(\sin x,\,\cos x)\bigr],$$

где $\Phi(x,z)=-\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

20. $\boldsymbol{y(\sin x)y(\cos x)=f^2(x).}$

Правая часть уравнения должна удовлетворять следующему условию: $f(x)=\pm f\bigl(\frac{\pi}{2}-x\bigr)$. Для определенности будем считать, что $f(x)=f\bigl(\frac{\pi}{2}-x\bigr)$.

Решение в неявном виде:

$$y(\sin x)=\pm f(x)\exp\bigl[\Phi(\sin x,\,\cos x)\bigr],$$

где $\Phi(x,z)=-\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

21. $\boldsymbol{y(x)y\bigl(\omega(x)\bigr)=b^2,}\qquad$ где $\quad\boldsymbol{\omega\bigl(\omega(x)\bigr)=x.}$

Решение:

$$y(x)=\pm b\exp\bigl[\Phi\bigl(x,\,\omega(x)\bigr)\bigr],$$

где $\Phi(x,z)=-\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

22. $\boldsymbol{y(x)y\bigl(\omega(x)\bigr)=f^2(x),}\qquad$ где $\quad\boldsymbol{\omega\bigl(\omega(x)\bigr)=x.}$

Правая часть уравнения должна удовлетворять следующему условию: $f(x)=\pm f\bigl(\omega(x)\bigr)$. Для определенности будем считать, что $f(x)=f\bigl(\omega(x)\bigr)$.

Решение:

$$y(x)=\pm f(x)\exp\bigl[\Phi\bigl(x,\,\omega(x)\bigr)\bigr],$$

где $\Phi(x,z)=-\Phi(z,x)$ — любая антисимметричная функция двух аргументов.

1.4. Функциональные уравнения со степенной нелинейностью

1. $\boldsymbol{y(x+a)-by^{\lambda}(x)=f(x).}$

Частный случай уравнения 1 из приложения 1.5.

2. $\boldsymbol{y^{\lambda}(x)y(a-x)=f(x).}$

Частный случай уравнения 2 из приложения 1.5.

Решение:

$$y(x)=\bigl[f(x)\bigr]^{-\frac{\lambda}{1-\lambda^2}}\bigl[f(a-x)\bigr]^{\frac{1}{1-\lambda^2}}.$$

3. $\boldsymbol{y^{2n+1}(x) + y^{2n+1}(a - x) = b, \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots .}$

Замена $w(x) = y^{2n+1}(x)$ приводит к линейному уравнению 15 из приложения 1.1: $w(x) + w(a - x) = b$.

4. $\boldsymbol{y^{\lambda}(x) y(a/x) = f(x).}$

Частный случай уравнения 4 из приложения 1.5.

Решение:

$$y(x) = \bigl[f(x)\bigr]^{-\frac{\lambda}{1-\lambda^2}} \bigl[f(a/x)\bigr]^{\frac{1}{1-\lambda^2}}.$$

5. $\boldsymbol{y^{\lambda}(x) y\Bigl(\dfrac{a - x}{1 + bx}\Bigr) = f(x).}$

Частный случай уравнения 5 из приложения 1.5.

6. $\boldsymbol{y^{\lambda}(x) y\Bigl(\dfrac{ax - \beta}{x + b}\Bigr) = f(x), \qquad \beta = a^2 + ab + b^2.}$

Частный случай уравнения 13 из приложения 1.5.

7. $\boldsymbol{y^{\lambda}(x) y\Bigl(\dfrac{bx + \beta}{a - x}\Bigr) = f(x), \qquad \beta = a^2 + ab + b^2.}$

Частный случай уравнения 13 из приложения 1.5.

8. $\boldsymbol{y^{\lambda}(x) y(x^a) = f(x).}$

Частный случай уравнения 8 из приложения 1.5.

9. $\boldsymbol{y^{\lambda}(x) y\bigl(\sqrt{a^2 - x^2}\,\bigr) = f(x).}$

Частный случай уравнения 9 из приложения 1.5.

10. $\boldsymbol{y^{\lambda}(\sin x) y(\cos x) = f(x).}$

Частный случай уравнения 10 из приложения 1.5.

1.5. Нелинейные функциональные уравнения общего вида

1. $\boldsymbol{F\bigl(x,\, y(x),\, y(x + a)\bigr) = 0.}$

Будем считать, что $a > 0$. Разрешим уравнение относительно $y(x + a)$:

$$y(x + a) = f\bigl(x,\, y(x)\bigr). \tag{1}$$

1°. Рассмотрим сначала уравнение на дискретном множестве точек $x = x_0 + ak$, где k — целое. При задании начальных значений $y(x_0)$ с помощью (1) можно последовательно найти $y(x_0 + a)$, $y(x_0 + 2a)$ и т. д.

Разрешая исходное уравнение относительно $y(x)$, получим

$$y(x) = g\bigl(x,\, y(x + a)\bigr). \tag{2}$$

Полагая здесь $x = x_0 - a$, можно найти $y(x_0 - a)$, а затем аналогичным образом найти $y(x_0 - 2a)$ и т. д.

Таким образом, из уравнения через начальные данные могут быть найдены значения $y(x)$ во всех точках $x_0 + ak$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2°. Рассмотрим уравнение, когда переменная x изменяется непрерывно. Будем считать, что $y(x)$ — непрерывная функция, которая задана произвольно на полуинтервале $[0,\, a)$. Из (1), положив $x = 0$, получают $y(a)$. Зная $y(x)$ в $[0,\, a]$, с помощью (1) находят $y(x)$ для $x \in [a,\, 2a]$, затем для $x \in [2a,\, 3a]$ и т. д.

Замечание. Случай $a < 0$ заменой $z = x + a$ сводится к уравнению вида $F\bigl(z + b,\, y(z + b),\, y(z)\bigr) = 0$, где $b = -a > 0$, которое рассмотрено ранее.

2. $\boldsymbol{F\big(x, y(x), y(a-x)\big) = 0.}$

Заменяя в уравнении x на $a-x$, получим $F\big(a-x, y(a-x), y(x)\big) = 0$. Исключая из этого уравнения и исходного уравнения величину $y(a-x)$, приходим к обычному алгебраическому (или трансцендентному) уравнению вида $\Psi\big(x, y(x)\big) = 0$.

Другими словами, решение исходного функционального уравнения $y = y(x)$ задается параметрически с помощью системы двух алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$F(x, y, t) = 0, \qquad F(a-x, t, y) = 0,$$

где t — параметр.

3. $\boldsymbol{F\big(x,\ y(x),\ y(ax)\big) = 0, \qquad a > 0.}$

Преобразование $z = \ln x$, $w(z) = y(x)$ приводит к уравнению вида

$$F\big(e^z,\ w(z),\ w(z+b)\big) = 0, \qquad b = \ln a.$$

См. уравнение 1 в этом разделе.

4. $\boldsymbol{F\big(x, y(x), y(a/x)\big) = 0.}$

Заменяя в уравнении x на a/x, получим $F\big(a/x, y(a/x), y(x)\big) = 0$. Исключая из этого уравнения и исходного уравнения величину $y(a/x)$, приходим к обычному алгебраическому (или трансцендентному) уравнению вида $\Psi\big(x, y(x)\big) = 0$.

Другими словами, решение исходного функционального уравнения $y = y(x)$ задается параметрически с помощью системы двух алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$F(x, y, t) = 0, \qquad F(a/x, t, y) = 0,$$

где t — параметр.

5. $\boldsymbol{F\Big(x, y(x), y\Big(\frac{a-x}{1+bx}\Big)\Big) = 0.}$

Заменяя в уравнении x на $\dfrac{a-x}{1+bx}$, получим

$$F\left(\frac{a-x}{1+bx},\ y\Big(\frac{a-x}{1+bx}\Big),\ y(x)\right) = 0.$$

Исключая из этого уравнения и исходного уравнения величину $y\Big(\dfrac{a-x}{1+bx}\Big)$, приходим к обычному алгебраическому (или трансцендентному) уравнению вида $\Psi\big(x, y(x)\big) = 0$.

Другими словами, решение исходного функционального уравнения $y = y(x)$ задается параметрически с помощью системы двух алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$F(x,\ y,\ t) = 0, \qquad F\Big(\frac{a-x}{1+bx},\ t,\ y\Big) = 0,$$

где t — параметр.

6. $\boldsymbol{F\Big(x,\ y(x),\ y\Big(\frac{ax-\beta}{x+b}\Big)\Big) = 0, \qquad \beta = a^2 + ab + b^2.}$

Частный случай уравнения 13 из этого раздела.

7. $\boldsymbol{F\Big(x,\ y(x),\ y\Big(\frac{bx+\beta}{a-x}\Big)\Big) = 0, \qquad \beta = a^2 + ab + b^2.}$

Частный случай уравнения 13 из этого раздела.

8. $\boldsymbol{F\big(x,\, y(x),\, y(x^a)\big) = 0.}$

Преобразование $\xi = \ln x$, $u(\xi) = y(x)$ приводит к уравнению вида

$$F\big(e^{\xi},\, u(\xi),\, u(a\xi)\big) = 0.$$

См. уравнение 3 в этом разделе.

9. $\boldsymbol{F\big(x, y(x), y(\sqrt{a^2 - x^2}\,)\big) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant a.}$

Заменяя в уравнении x на $\sqrt{a^2 - x^2}$, получим

$$F\big(\sqrt{a^2-x^2},\, y(\sqrt{a^2-x^2}\,),\, y(x)\big) = 0.$$

Исключая из этого уравнения и исходного уравнения величину $y\big(\sqrt{a^2-x^2}\,\big)$, приходим к обычному алгебраическому (или трансцендентному) уравнению вида $\Psi\big(x, y(x)\big) = 0$.

Другими словами, решение исходного функционального уравнения $y = y(x)$ задается параметрически с помощью системы двух алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$F(x,\, y,\, t) = 0, \qquad F\big(\sqrt{a^2 - x^2},\, t,\, y\big) = 0,$$

где t — параметр.

10. $\boldsymbol{F\big(x, y(\sin x), y(\cos x)\big) = 0.}$

Заменяя в уравнении x на $\frac{\pi}{2} - x$, получим $F\big(\frac{\pi}{2} - x,\, y(\cos x),\, y(\sin x)\big) = 0$. Исключая из этого уравнения и исходного уравнения величину $y(\cos x)$, можно получить уравнение вида $\Psi\big(x, y(\sin x)\big) = 0$, решение которого не представляет трудностей.

Решение исходного функционального уравнения $y = y(x)$ задается параметрически с помощью системы трех трансцендентных уравнений

$$F(t,\, y,\, w) = 0, \qquad F\big(\tfrac{\pi}{2} - t,\, w,\, y\big) = 0, \qquad x - \sin t = 0,$$

где t и w — параметры.

11. $\boldsymbol{F\big(x, y(x), y(\omega(x))\big) = 0,}$ где $\boldsymbol{\omega\big(\omega(x)\big) = x.}$

Заменяя в уравнении x на $\omega(x)$, получим $F\big(\omega(x),\, y\big(\omega(x)\big),\, y(x)\big) = 0$. Исключая из этого уравнения и исходного уравнения величину $y\big(\omega(x)\big)$, приходим к обычному алгебраическому (или трансцендентному) уравнению вида $\Psi\big(x, y(x)\big) = 0$.

Решение исходного функционального уравнения $y = y(x)$ задается параметрически с помощью системы двух алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$F(x,\, y,\, t) = 0, \qquad F\big(\omega(x),\, t,\, y\big) = 0,$$

где t — параметр.

12. $\boldsymbol{F\big(x,\, y(x),\, y(x+1),\, y(x+2)\big) = 0.}$

Уравнение в конечных разностях второго порядка общего вида. Частный случай уравнения 14 из этого раздела.

13. $\boldsymbol{F\Big(x,\, y(x),\, y\Big(\dfrac{ax-\beta}{x+b}\Big),\, y\Big(\dfrac{bx+\beta}{a-x}\Big)\Big) = 0, \qquad \beta = a^2 + ab + b^2.}$

Заменим последовательно в функциональном уравнении x сначала на $\dfrac{ax-\beta}{x+b}$, а затем — на $\dfrac{bx+\beta}{a-x}$. В результате получим следующую систему (первым записано исходное уравнение):

$$\begin{gathered} F\big(x,\, y(x),\, y(u),\, y(w)\big) = 0, \\ F\big(u,\, y(u),\, y(w),\, y(x)\big) = 0, \\ F\big(w,\, y(w),\, y(x),\, y(u)\big) = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь аргументы u и w выражаются через переменную x по формулам

$$u = \frac{ax-\beta}{x+b}, \quad w = \frac{bx+\beta}{a-x}.$$

Исключая из системы нелинейных алгебраических (или трансцендентных) уравнений (1) величины $y(u)$ и $y(w)$, получим решение $y = y(x)$ исходного функционального уравнения.

14. $F\big(x,\, y(x),\, y(x+1),\, \ldots,\, y(x+n)\big) = 0.$

Уравнение в конечных разностях n-го порядка общего вида.

Разрешим уравнение относительно $y(x+n)$:

$$y(x+n) = f\big(x,\, y(x),\, y(x+1),\, \ldots,\, y(x+n-1)\big). \tag{1}$$

1°. Рассмотрим уравнение на дискретном множестве точек $x = x_0 + k$, где k — целое. При задании начальных значений $y(x_0)$, $y(x_0+1)$, …, $y(x_0+n-1)$ с помощью (1) можно последовательно найти $y(x_0+n)$, $y(x_0+n+1)$ и т. д.

Разрешая исходное уравнение относительно $y(x)$, получим

$$y(x) = g\big(x,\, y(x+1),\, y(x+2),\, \ldots,\, y(x+n)\big). \tag{2}$$

Полагая здесь $x = x_0 - 1$, можно найти $y(x_0-1)$, а затем аналогичным образом найти $y(x_0-2)$ и т. д.

Таким образом, из уравнения через начальные данные могут быть найдены значения $y(x)$ во всех точках x_0+k, где $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

2°. Рассмотрим уравнение, когда переменная x изменяется непрерывно. Будем считать, что $y(x)$ — непрерывная функция, которая задана произвольно на полуинтервале $[0,\, n)$. Из (1), положив $x = 0$, получают $y(n)$. Зная $y(x)$ в $[0,\, n]$, с помощью (1) находят $y(x)$ для $x \in [n,\, n+1]$, затем для $x \in [n+1,\, n+2]$ и т. д.

◉ *Литература*: Математическая энциклопедия, т. 2 (1979, стр. 1029, 1030).

15. $F\big(x,\, y(x),\, y^{[2]}(x),\, \ldots,\, y^{[n]}(x)\big) = 0.$

Здесь использованы обозначения $y^{[2]}(x) = y\big(y(x)\big)$, …, $y^{[n]}(x) = y\big(y^{[n-1]}(x)\big)$.

Решение ищем в параметрическом виде:

$$x = w(t), \quad y = w(t+1). \tag{1}$$

При этом исходное уравнение приводится к следующему уравнению в конечных разностях n-го порядка (см. предыдущее уравнение):

$$F\big(w(t),\, w(t+1),\, w(t+2),\, \ldots,\, w(t+n)\big) = 0. \tag{2}$$

Структура общего решения уравнения (2) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= w(t) = \varphi(t;\, C_1, \ldots, C_n), \\ y &= w(t+1) = \varphi(t+1;\, C_1, \ldots, C_n), \end{aligned}$$

где $C_1 = C_1(t)$, …, $C_n = C_n(t)$ — произвольные периодические функции с периодом единица, т. е. $C_k(t) = C_k(t+1)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

◉ *Литература*: Математическая энциклопедия, т. 5 (1985, стр. 703).

16. $F\big(\, x,\, y(\theta_0(x)),\, y(\theta_1(x)),\, \ldots,\, y(\theta_{n-1}(x))\,\big) = 0.$

Здесь использованы обозначения $\theta_k(x) \equiv \theta\big(x + \frac{k}{n}T\big)$, где $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1$, и считается, что $\theta(x) = \theta(x+T)$ — периодическая функция с периодом T. На правую часть уравнения накладывается условие $F(x, \ldots) = F(x+T, \ldots)$.

Заменим последовательно в функциональном уравнении x на $x + \frac{k}{n}T$ при $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. В результате получим следующую систему (первым записано исходное уравнение):

$$\begin{aligned} &F\big(x,\ y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_{n-1}\big) = 0,\\ &F\big(x + \tfrac{1}{n}T,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_0\big) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &F\big(x + \tfrac{n-1}{n}T,\ y_{n-1},\ y_0,\ \ldots,\ y_{n-2}\big) = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где приняты краткие обозначения $y_k \equiv y\big(\theta_k(x)\big)$.

Исключая из системы нелинейных алгебраических (или трансцендентных) уравнений (1) величины $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1}$, получим решение функционального уравнения в неявном виде: $\Psi\big(x,\ y_0\big) = 0$, где $y_0 = y\big(\theta(x)\big)$.

2. Функциональные уравнения с несколькими независимыми переменными

2.1. Линейные функциональные уравнения

1. $\boldsymbol{f(x+y) = f(x) + f(y)}$.

Уравнение Коши. Решение:

$$f(x) = Cx,$$

где C — произвольная постоянная.

◉ *Литература*: Г. М. Фихтенгольц, т. 1 (1969, стр. 157, 158).

2. $\boldsymbol{f(xy) = f(x) + f(y)}$.

Уравнение Коши. Решение:

$$f(x) = C\ln x,$$

где C — произвольная постоянная.

◉ *Литература*: Математическая энциклопедия, т. 5 (1985, стр. 699, 700).

3. $\boldsymbol{f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\operatorname{ch} y}$.

Решение:

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4. $\boldsymbol{f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y}$.

Решение:

$$f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

◉ *Литература*: Математическая энциклопедия, т. 5 (1985, стр. 704).

5. $\boldsymbol{f(ax, ay) = f(x, y)}$.

Здесь a — любое число ($a \neq 0$).

Решение:

$$f(x, y) = \Phi(y/x),$$

где $\Phi(x)$ — произвольная функция.

6. $\boldsymbol{f(ax, ay) = a^\beta f(x, y)}$.

Здесь a — любое число ($a \neq 0$), β — некоторая постоянная.

Решение:

$$f(x, y) = x^\beta \Phi(y/x),$$

где $\Phi(x)$ — произвольная функция.

7. $\boldsymbol{f(ax, a^\beta y) = f(x, y)}$.

Здесь a — любое число ($a \neq 0$), β — некоторая постоянная.

Решение:

$$f(x, y) = \Phi\big(yx^{-\beta}\big),$$

где $\Phi(x)$ — произвольная функция.

8. $\boldsymbol{f(x, y) + f(y, z) = f(x, z)}$.

Решение:

$$f(x, y) = \Phi(x) - \Phi(y),$$

где $\Phi(x)$ — произвольная функция.

⦿ *Литература*: Математическая энциклопедия, т. 5 (1985, стр. 700).

2.2. Нелинейные функциональные уравнения

1. $\boldsymbol{f(x + y) = f(x)f(y)}$.

Уравнение Коши. Решение:

$$f(x) = e^{Cx},$$

где C — произвольная постоянная. Кроме того, непрерывным решением является функция $f(x) \equiv 0$.

⦿ *Литература*: Г. М. Фихтенгольц, т. 1 (1969, стр. 158, 159).

2. $\boldsymbol{f(xy) = f(x)f(y)}$.

Уравнение Коши. Решение:

$$f(x) = x^C,$$

где C — произвольная постоянная. Кроме того, непрерывным решением является функция $f(x) \equiv 0$.

⦿ *Литература*: Г. М. Фихтенгольц, т. 1 (1969, стр. 160).

3. $\boldsymbol{f(y + x) + f(y - x) = 2f(x)f(y)}$.

Решения:

$$f(x) = \cos(Cx), \qquad f(x) = \operatorname{ch}(Cx), \qquad f(x) \equiv 0,$$

где C — произвольная постоянная.

⦿ *Литература*: Г. М. Фихтенгольц, т. 1 (1969, стр. 160).

4. $\boldsymbol{f(x, y)f(y, z) = f(x, z)}$.

Решение:

$$f(x, y) = \Phi(y)/\Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — произвольная функция.

⦿ *Литература*: Математическая энциклопедия, т. 5 (1985, стр. 700).

5. $\boldsymbol{af(x + 1, y, z)f(x - 1, y, z) + bf(x, y + 1, z)f(x, y - 1, z) +}$
$\boldsymbol{+ cf(x, y, z + 1)f(x, y, z - 1) = 0}$.

Уравнение Хироты; a, b, c — произвольные постоянные.

Об этом уравнении см. обзор А. В. Забродина (Теор. и матем. физика, 1997, т. 113, № 2, с. 179–230).

Список литературы

Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.

Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. — М.–Л.: Гостехиздат, 1952.

Бабенко Ю. И. Тепломассообмен: Метод расчета тепловых и диффузионных потоков. — М.: Химия, 1986.

Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. — М.: Наука, 1973.

Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. — М.: Наука, 1974.

Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 1. — М.: Наука, 1969.

Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.

Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1979.

Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. — Киев: Наукова Думка, 1986.

Виарда Г. Интегральные уравнения. — М.–Л.: ОНТИ, 1933.

Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1982.

Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.

Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. — М.: Наука, 1978.

Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. — М.: Наука, 1967.

Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1975.

Гурса Э. Курс математического анализа, т. 3, часть II. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. — Л.: Гостехиздат, 1934.

Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971.

Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Наука, 1974.

Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. — М.: Наука, 1965.

Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Факториал, 1997.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Факториал, 1997.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения. — М.: Наука, 1995.

Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.

Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.

Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1984.

Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.

Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: ТОО "Янус", 1995.
Ловитт У. В. Линейные интегральные уравнения. — М.: Гостехиздат, 1957.
Математическая энциклопедия, т. 2. — М.: Советская энциклопедия, 1979.
Математическая энциклопедия, т. 5. — М.: Советская энциклопедия, 1985.
Миролюбов А. А., Солдатов М. А. Линейные однородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1981.
Миролюбов А. А., Солдатов М. А. Линейные неоднородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1986.
Михайлов Л. Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1. — Душанбе: Дониш, 1966.
Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. — М.: Физматгиз, 1959.
Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
Мюнтц Г. М. Интегральные уравнения. — Л.: Гостехиздат, 1934.
Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1951.
Привалов И. И. Интегральные уравнения. — М.–Л.: ОНТИ, 1935.
Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983.
Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.
Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1970.
Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том 4, часть 1. — М.: Наука, 1974.
Снеддон И. Преобразования Фурье. — М.: Иностранная литература, 1955.
Трикоми Ф. Интегральные уравнения. — М.: Иностранная литература, 1960.
Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Часть 1. — М.: Физматлит, 1963.
Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. — М.: Наука, 1969.
Фок В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Докл. АН СССР, 1942, т. 26, № 4–5, с. 147–151.
Хиршман И. И., Уиддер Д. В. Преобразования типа свертки. — М.: Иностранная литература, 1958.
Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. — М.: Наука, 1970.
Brakhage H., Nickel K., Rieder P. Auflösung der Abelschen Integralgleichung 2. Art. — ZAMP, 1965, Vol. 16, Fasc. 2, S. 295–298.
Gorenflo R., Vessella S. Abel Integral Equations: Analysis and Applications. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1991.
Gripenberg G., Londen S.-O., Staffans O. Volterra Integral and Functional Equations. — Cambridge–New York: Cambridge Univ. Press, 1990.
Jerry A. J. Introduction to Integral Equations with Applications. — New York–Basel: Marcel Dekker, 1985.
Polyanin A. D., Manzhirov A. V. Handbook of Integral Equations. — Boca Raton–New York, CRC Press, 1998.
Polyanin A. D., Manzhirov A. V. Handbuch der Integralgleichungen. — Heidelberg - Berlin, Spectrum Akad. Verlag, 1998.
Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. — Boca Raton — New York: CRC Press, 1995.
Sakhnovich L. A. Integral Equations with Difference Kernels on Finite Intervals. — Basel–Boston: Birkhauser Verlag, 1996.
Zwillinger D. Handbook of Differential Equations. — San Diego: Academic Press, 1989.

Справочное издание

ПОЛЯНИН Андрей Дмитриевич
МАНЖИРОВ Александр Владимирович

СПРАВОЧНИК ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Компьютерная верстка *А. И. Журов*
Корректор *О. А. Васильева*

Формат $60\times 90/16$. Усл. печ. л. 27. Бумага офсетная № 1. Гарнитура литературная. Подписано к печати 11.03.1998. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство «Факториал», 117449, Москва, а/я 331; ЛР № 063537 от 22.07.1994.

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука». 121099, Москва Г-99, Шубинский пер., 6.